確率・統計 B
確率変数と分布の収束

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2013.10.15

table of contents

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

$\{X_n\}$: 確率変数列, θ : 定数, X : 確率変数

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は θ に確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)$$

とかく.

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に 確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad (n \to \infty)$$

とかく.

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,

$\mathsf{E}(X_n) = \mu, \mathsf{Var}(X_n) = \sigma^2 \ (n = 1, 2, \ldots)$

$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \to \infty)$$

概収束 (2/7)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

$\{X_n\}$：確率変数列, X：確率変数
$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$^{\exists}E \subset \Omega \ \textit{s.t.}\ \mathrm{P}(E) = 0,\ ^{\forall}\omega \in \Omega_0 = \Omega - E \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといい,

$$X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$$

とかく.

概収束 (3/7)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega \ ; \ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}$$
$$B_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega \ ; \ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値

(i) $X_n \stackrel{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$

(ii) $\forall\varepsilon$ $\mathsf{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

(iii) $\forall\varepsilon$ $\mathsf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$

概収束 (7/7)

定理 5.8

$$X_n \overset{a.s.}{\to} X \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{p}{\to} X \ (n \to \infty)$$

(証明は板書で)

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に 同一分布 に従う確率変数列,
E$(X_n) = \mu$ (有限値)
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n \overset{a.s.}{\to} \mu \quad (n \to \infty)$$

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 6 章)

分布収束 (1/12)

定義 5.2 (分布収束 (convergence in distribution))

F_n : 確率変数 X_n の分布関数 $(n = 1, 2, \ldots)$,
F : 確率変数 X の分布関数

F の任意の連続点 x で

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または 法則収束) するという. P_X を X_n の極限分布といい,

$$X_n \xrightarrow{d} X \ (n \to \infty) \text{ または } X_n \xrightarrow{d} P_X \ (n \to \infty)$$

とかく. (P_X には $N(0, 1)$ などの分布を表す記号こともある)

分布収束 (2/12)

退化した分布

実数 c に対して

$$\mathsf{P}(X = c) = 1$$

であるとき, X の分布を c に退化した分布といい, $U(c)$ と表す.

$U(c)$ の分布関数は

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

分布収束 (3/12)

例 5.3

$\{X_n\}$：互いに独立な確率変数列,
$X_i \sim U(0,1)$ (区間 (0,1) 上の一様分布)

$$U_n = \max_{i \le n} X_i$$

とする. U_n の分布関数は

$$\begin{aligned} F_n(u) &= \mathsf{P}(U_n \le u) = \mathsf{P}(X_1 \le u, \ldots, X_n \le u) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \le u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ u^n, & 0 < u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} F_n(u) = F(u) = \begin{cases} 0, & u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases}$$

分布収束 (4/12)

例 5.3 (つづき)

$F(u)$ は 1 に退化した分布 $U(1)$ の分布関数で

$$U_n \xrightarrow{d} U(1)$$

となる.

$$W_n = n(1 - U_n)$$

W_n の分布関数は

$$\begin{aligned} G_n(w) &= \mathsf{P}(W_n \le w) = \mathsf{P}(n(1-U_n) \le w) = \mathsf{P}\left(U_n \ge 1 - w/n\right) \\ &= 1 - F_n\left(1 - w/n\right) = \begin{cases} 0, & w \le 0 \\ 1 - (1 - w/n)^n, & 0 \le w \le n \\ 1, & w \ge n \end{cases} \end{aligned}$$

分布収束 (5/12)

例 5.3 (つづき)

$$\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - e^{-w}, & w \geq 0 \end{cases}$$

$G(w)$ は平均 1 をもつ指数分布 $\mathit{Ex}(1)$ の分布関数であるので

$$W_n \xrightarrow{d} \mathit{Ex}(1)$$

となる.

分布収束 (6/12)

定理 5.3

確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ が X に確率収束すれば, その確率変数列は X に分布収束している. すなわち

$$X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

が成り立つ. とくに, $X \sim U(c)$ のときは, 逆も成り立つ. したがって

$$X_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} c.$$

が成り立つ.

分布収束 (7/12)

[証明]

F : X の分布関数, F_n : X_n の分布関数 $\varepsilon > 0$

$X_n > x$ かつ $|X_n - X| \leq \varepsilon \Rightarrow X > x - \varepsilon$

$X \leq x - \varepsilon \Rightarrow X_n \leq x$ または $|X_n - X| > \varepsilon$

$\mathsf{P}(X \leq x - \varepsilon) \leq \mathsf{P}(X_n \leq x) + \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$

$F(x - \varepsilon) \leq F_n(x) + \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$

$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$

分布収束 (8/12)

$X > x + \varepsilon$ かつ $|X_n - X| \leq \varepsilon \Rightarrow X_n > x$

対偶をとると

$X_n \leq x \Rightarrow X \leq x + \varepsilon$ または $|X_n - X| > \varepsilon$

$\mathsf{P}(X_n \leq x) \leq \mathsf{P}(X \leq x + \varepsilon) + \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$

$F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$

$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$

分布収束 (9/12)

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x+\varepsilon)$$

$\varepsilon \to 0$ とすると, x が F の連続点ならば

$$F(x) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

分布収束 (10/12)

$\mathsf{P}(X = c) = 1$ とし，逆を示す．このとき

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

であり，$x \neq c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) &\geq \mathsf{P}(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon) \\ &= F_n(c+\varepsilon) - F_n(c-\varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) \geq F(c+\varepsilon) - F(c-\varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

分布収束 (11/12)

例 5.4 (定理 5.3 の逆の反例)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathsf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}, \omega = 1, 2, 3, 4$$

とし, $n = 1, 2, \cdots,$ に対して

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 1, 2 \\ 0, & \omega = 3, 4 \end{cases} \qquad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1, 2 \\ 1, & \omega = 3, 4 \end{cases}$$

とすると $X_n \xrightarrow{d} X \ (n \to \infty)$ であるが

$$^{\forall}\omega \in \Omega \ |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$$

なので, 確率収束しない.

分布収束 (12/12)

定理 5.4 (レヴィの連続定理)

$X_n\ (n=1,2,\ldots)$ の特性関数を $\varphi_n\ (n=1,2,\ldots)$ とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t=0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} \mathsf{P}_X\ (n\to\infty)$.
[証明は省略 (テキスト参照)]

分布収束と特性関数の収束

$\varphi_n(t)$: 確率変数 X_n の特性関数 $(n=1,2,\ldots)$
$\varphi(t)$: 確率変数 X の特性関数

$$X_n \xrightarrow{d} X\ (n\to\infty) \quad\Leftrightarrow\quad {}^{\forall}t\ \varphi_n(t)\to\varphi(t)\ (n\to\infty)$$