確率・統計B
確率変数と分布の収束

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2013.10.22

table of contents

確率収束

概収束

分布収束

中心極限定理

漸近公式

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

$\{X_n\}$：確率変数列， θ：定数， X：確率変数

$$^\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき，$\{X_n\}$ は θ に確率収束するといい，

$$X_n \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)$$

とかく．

$$^\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき，$\{X_n\}$ は X に 確率収束するといい，

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad (n \to \infty)$$

とかく．

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,
$\mathsf{E}(X_n) = \mu, \mathsf{Var}(X_n) = \sigma^2 \ (n = 1, 2, \ldots)$
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \to \infty)$$

概収束 (2/7)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

$\{X_n\}$: 確率変数列, X : 確率変数
$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$ {}^{\exists}E \subset \Omega \ \textit{s.t.}\ \mathrm{P}(E) = 0,\ {}^{\forall}\omega \in \Omega_0 = \Omega - E \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) $$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといい,

$$ X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty) $$

とかく.

概収束 (3/7)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega \; ; \; |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}$$
$$B_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega \; ; \; |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値

(i) $X_n \stackrel{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$

(ii) $\forall \varepsilon$ $\mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

(iii) $\forall \varepsilon$ $\mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$

概収束 (7/7)

定理 5.8

$$X_n \overset{a.s.}{\to} X \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad X_n \overset{p}{\to} X \ (n \to \infty)$$

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に 同一分布 に従う確率変数列,
E$(X_n) = \mu$ (有限値)
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n \overset{a.s.}{\to} \mu \quad (n \to \infty)$$

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 6 章)

分布収束 (1/12)

定義 5.2 (分布収束 (convergence in distribution))

F_n : 確率変数 X_n の分布関数 $(n = 1, 2, \ldots)$,
F : 確率変数 X の分布関数

F の任意の連続点 x で

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または 法則収束) するという. P_X を X_n の極限分布といい,

$$X_n \xrightarrow{d} X \ (n \to \infty) \text{ または } X_n \xrightarrow{d} P_X \ (n \to \infty)$$

とかく. (P_X には $N(0,1)$ などの分布を表す記号こともある)

分布収束 (6/12)

定理 5.3

確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ が X に確率収束すれば, その確率変数列は X に分布収束している. すなわち

$$X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

が成り立つ. とくに, $X \sim U(c)$ のときは, 逆も成り立つ. したがって

$$X_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} c.$$

が成り立つ.

分布収束 (12/12)

定理 5.4 (レヴィの連続定理)

X_n $(n=1,2,\ldots)$ の特性関数を φ_n $(n=1,2,\ldots)$ とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t=0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{P}_X$ $(n\to\infty)$.
[証明は省略 (テキスト参照)]

分布収束と特性関数の収束

$\varphi_n(t)$: 確率変数 X_n の特性関数 $(n=1,2,\ldots)$
$\varphi(t)$: 確率変数 X の特性関数

$$X_n \xrightarrow{d} X\ (n\to\infty) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\forall}t\ \varphi_n(t)\to\varphi(t)\ (n\to\infty)$$

中心極限定理 (1/5)

定理 5.5 (中心極限定理)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列,

$$\mathsf{E}(X_j) = \mu,\ \mathsf{Var}(X_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

[証明は板書で]

中心極限定理 (2/5)

注 5.6 (基準化)

確率変数 X に対して

$$Z = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)}}$$

を X の基準化 という.

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ の基準化も, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ の基準化も, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ となる.

(2) a, b を定数とするとき, X の基準化と, $aX + b$ の基準化は同じ.

中心極限定理 (3/5)

注 5.7 (和の分布の近似)

$\{X_n\}$：独立に同一分布に従う確率変数列
中心極限定理を用いると和 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ の分布を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(a < S_n \le b) &= \mathrm{P}\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

によって近似できる.

中心極限定理 (4/5)

注 5.8 (連続性の補正)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列. 整数値のみをとる.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

S_n も整数値しかとらないので, a, b を整数値とするとき,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(a \le S_n \le b) &= \mathsf{P}(a - 1 < S_n \le b) \quad (1) \\ &= \mathsf{P}(a - 0.5 < S_n \le b + 0.5) \quad (2) \end{aligned}$$

中心極限定理 (5/5)

注 5.8 (連続性の補正 (つづき))

$\mathrm{E}(X_j) = \mu, \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$ とする.
(1), (2) それぞれの, 中心極限定理による確率の近似式は

$$\Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{3}$$

$$\Phi\left(\frac{b + 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{4}$$

例 5.5 (2 項分布の正規近似)

コインを 200 回投げて, 表が 95 回以上 105 回以下でる確率
$\mu = 1/2, \sigma^2 = 1/4, n = 200, a = 95, b = 105$
正確な値：$0.56325\cdots$,
近似値：(3) 0.56222(0.00103),　(4) 0.56331(0.000006)

漸近公式 (1/9)

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X$$

定理 5.11

(1) $X_n \xrightarrow{p} a$ かつ $g(x)$ は $x = a$ で連続 $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$.

(2) $X_n \xrightarrow{p} a, Y_n \xrightarrow{p} b$ かつ $g(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で連続
$\Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(a, b)$.

(3) $X_n \xrightarrow{d} X$ かつ $g(x)$ は X の値域 $(= R(X))$ で連続
$\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

(4) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} b$ かつ $g(x, y)$ は $D = \{(x, b) \,|\, x \in R(X)\}$ で連続
$\Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, b)$.

(5) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ かつ $g(x)$ は $R(X)$ で連続 $\Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$.

[証明は (1) のみ, 板書で]

漸近公式 (2/9)

定理 5.12 (スラスキーの定理)

$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{p} c$ 定数 とする．ただし, c は定数である．このとき

(1) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

(2) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$.

(3) $X_n/Y_n \xrightarrow{d} X/c \quad (c \neq 0,\ \mathrm{P}(Y_n \neq 0) = 1)$.

補題 1

分布関数の不連続点は高々可算個
[証明は板書で]

漸近公式 (3/9)

[証明]

(1) $F_X(z)$: X の分布関数,　$F_{X+c}(z)$: $X+c$ の分布関数
　$F_{X_n+Y_n}(z)$: X_n+Y_n の分布関数

$$F_{X+c}(z) = \mathsf{P}(X+c \leq z) = F_X(z-c)$$

$z-c$ が F_X の連続点のとき次を示せばよい.

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(z) = F_X(z-c)$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ かつ $z-c\pm\varepsilon'$ が F_X の連続点となるような ε' をとる.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_n+Y_n \leq z) &\leq \mathsf{P}(X_n+Y_n \leq z\,, |Y_n-c| \leq \varepsilon') + \mathsf{P}(|Y_n-c| > \varepsilon') \\ &\leq \mathsf{P}(X_n \leq z-c+\varepsilon') + \mathsf{P}(|Y_n-c| > \varepsilon')\end{aligned}$$

$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(z) \leq F_X(z-c+\varepsilon')$$

漸近公式 (4/9)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_n \le z - c - \varepsilon') &\le \mathsf{P}(X_n \le z - c - \varepsilon', |Y_n - c| \le \varepsilon') \\ &\quad + \mathsf{P}(|Y_n - c| > \varepsilon') \\ &\le \mathsf{P}(X_n + Y_n \le z) + \mathsf{P}(|Y_n - c| > \varepsilon')\end{aligned}$$

$$F_X(z - c - \varepsilon') \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(z)$$

ε' はいくらでも小さくとれるので

$$F_X(z - c) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(z) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(z) \le F_X(z - c)$$

漸近公式 (5/9)

(2) $X_nY_n = X_nc + X_n(Y_n - c),\quad X_nc \xrightarrow{d} Xc\ (n \to \infty)$

なので, $X_n(Y_n - c) \xrightarrow{p} 0$ を示せばよい． 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{1 - F_X(M)\} + F_X(-M) < \varepsilon$ かつ $\pm M$ が F_X の連続点であるような M をとると, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(|X_n(Y_n - c)| > \delta)\\&\quad \le \mathrm{P}(X_n \le -M) + \mathrm{P}(X_n > M) + \mathrm{P}(|Y_n - c| > \delta/M)\end{aligned}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n(Y_n - c)| > \delta) \le F_X(-M) + \{1 - F_X(M)\} < \varepsilon$$

より $X_n(Y_n - c) \xrightarrow{p} 0$

(3) $\dfrac{1}{Y_n} \xrightarrow{p} \dfrac{1}{c}\ (n \to \infty)$ なので, (2) より $X_n \cdot \dfrac{1}{Y_n} \xrightarrow{p} X \cdot \dfrac{1}{c}$

漸近公式 (6/9)

定義 5.1 (多次元確率ベクトルと分布の収束)

$F(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{X}$ を k 次元確率ベクトルの分布関数.

(1) 任意の正数 ε に対して $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}\| > \varepsilon) = 0$ が成り立つとき, $\{\boldsymbol{X}_n\}$ は $\boldsymbol{X}$ に確率収束するといい, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} X$ とかく. ここで, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム,

(2) $F(\boldsymbol{x})$ のすべての連続点で $\lim_{n\to\infty} F_n(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ が成り立つとき, $\boldsymbol{X}_n$ は $\boldsymbol{X}$ に分布収束 (または, 法則収束) するといい, $\boldsymbol{X}$ の分布を P_X とするとき, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$, または, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \mathrm{P}_X$ とかく.

(3) $\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}) = 1$ が成り立つとき, $\{\boldsymbol{X}_n\}$ は $\boldsymbol{X}$ に概収束する, または確率 1 で収束するといい, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{X}$ とかく.

漸近公式 (7/9)

命題 1 (確率ベクトルの収束と成分の収束)

$\boldsymbol{X}_n = (X_{n_1}, \ldots, X_{n_k})'$, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) $X_{n_i} \xrightarrow{p} X_i,\ i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{X}$.

(2) $X_{n_i} \xrightarrow{a.s.} X_i,\ i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{X}$.

漸近公式 (8/9)

例 5.6

(X_n, Y_n)：次の確率密度関数を持つ 2 次元連続型確率ベクトル.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, xy > 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(X, Y)：矩形 $(-1,1) \times (-1,1)$ 上の 2 次元一様分布に従う確率ベクトル.

X_n, Y_n, X, Y の周辺分布はすべて区間 $(-1,1)$ 上の一様分布なので，$X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} Y$

(X_n, Y_n) の極限分布は，$(-1,1) \times (-1,1)$ 上の 2 次元一様分布ではない.

漸近公式 (9/9)

定理 5.13 (確率ベクトルの分布収束と特性関数の収束)

$\varphi(\boldsymbol{t})$: k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ 特性関数
$\varphi_n(\boldsymbol{t})$: k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}_n,\ n = 1, 2, \ldots$ の特性関数

次の $(1) \sim (3)$ は同値.

(1) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} X (n \to \infty)$.

(2) 任意の有界連続関数 $g(\boldsymbol{x})$ に対して
$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{g(\boldsymbol{X}_n)\} = \mathsf{E}\{g(\boldsymbol{X})\}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\boldsymbol{t}) = \varphi(\boldsymbol{t})$.

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 5 章)