練習問題略解（あるいはヒント）

問題 1 (1) $\mu_m = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\Big)$, $\sigma_m^2 = \dfrac{1}{4m}\Big(\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{12}\Big)$

(2) チェビシェフの不等式より $\cdots$

(3) $Y_m^{(0)} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_{2k}, Y_m^{(1)} = \dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_{2k-1}$ とおくと, $Y_m = \dfrac{1}{2}Y_m^{(0)} + \dfrac{1}{2}Y_m^{(1)}$

$Y_m^{(0)}, Y_m^{(1)}$ をそれぞれ基準化したものを $Z_m^{(0)}, Z_m^{(1)}$ とおいて, Z_m を $Z_m^{(0)}, Z_m^{(1)}$ で表わす.

$Z_m^{(0)}, Z_m^{(1)}$ に中心極限定理を適用すると, それぞれ, 標準正規分布に分布収束するので, スラスキーの定理より, Z_m の極限分布が決まる.

問題 2 互いに独立ならば, 共分散が 0 (確率統計 A の内容) なので, $\boldsymbol{\Sigma}$ は対角行列.

逆に互いに独立なら, 多変量正規分布の確率密度関数の行列式が対角成分の積, 2 次形式が, 成分ごとの和に書けるので, 1 次元の正規分布の確率密度関数の積に表せることから, 独立であることが言える.

問題 3 授業で示した. (定理の証明)

問題 4 準備：$a > 0, b > 0$ とするとき,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ay}y^{b-1}dy &= \frac{1}{a^b}\int_0^\infty e^{-(ay)}(ay)^{b-1}ady \ (ay = t \text{ とおく }) \\ &= \frac{1}{a^b}\int_0^\infty e^{-t}t^{b-1}dt = \frac{\Gamma(b)}{a^b}\end{aligned}$$

X, Y の確率密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$ とおくと,

$$\mathrm{P}(R \le r) = \mathrm{P}(X \le rY) = \int_0^\infty\Big\{\int_0^{ry} f_X(x)f_Y(y)dx\Big\}dy$$

R の確率密度関数を $f_R(r)$ とおくと

$$f_R(r) = \frac{d}{dr}\mathrm{P}(R \le r) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\Big\{\int_0^{ry} f_X(x)f_Y(y)dx\Big\}dy = \int_0^\infty f_X(ry)yf_Y(y)dxdy$$

$f_X(x), f_Y(y)$ に, χ_m^2 分布, χ_n^2 分布の確率密度関数の定義式を代入すると

$$\begin{aligned}f_R(r) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})2^{(m+n)/2}}\int_0^\infty e^{-(1+r)y/2}y^{(m+n)/2-1}r^{m/2-1}dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})2^{(m+n)/2}}r^{m/2-1}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{(\frac{1+r}{2})^{(m+n)/2}} = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{r^{m/2-1}}{(1+r)^{(m+n)/2}}\end{aligned}$$

問題 5 $X_{(3)} \le x$ が成り立つのは, 次の 5 通りのいずれかが成り立つ場合：

(i) $X_1 \le x$ かつ $X_2 \le x$ かつ $X_3 \le x$ かつ $X_4 > x$

(ii) $X_1 \leq x$ かつ $X_2 \leq x$ かつ $X_4 \leq x$ かつ $X_3 > x$

(iii) $X_1 \leq x$ かつ $X_3 \leq x$ かつ $X_4 \leq x$ かつ $X_2 > x$

(iv) $X_2 \leq x$ かつ $X_3 \leq x$ かつ $X_4 \leq x$ かつ $X_1 > x$

(v) $X_1 \leq x$ かつ $X_2 \leq x$ かつ $X_3 \leq x$ かつ $X_4 \leq x$

この 5 つの事象は互いに背反なので、それぞれの確率を $F(x)$ を用いて表わして和を取ればよい. そのとき, X_1, X_2, X_3, X_4 が独立で同じ分布であることを用いる.

(答えは, 定理 6.11 で, $n = 4, i = 3$ としたもの.)