確率・統計 B 中間試験問題

12 月 16 日

問題 1 (1) 2 項分布 $B(n,p)$, ポアソン分布 $p(\lambda)$ の特性関数は, それぞれ
$\psi_B(t;n,p)=\{e^{it}p+(1-p)\}^n$, $\psi_p(t;\lambda)=\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$
であることを示せ.

(2) $\{X_n\}$ を確率変数列とし, X_n は 2 項分布 $B(n,\dfrac{\lambda}{n})$ に従う確率変数とする.
$n\to\infty$ のとき, X_n はポアソン分布 $p(\lambda)$ に分布収束することを示せ.

(3) $\{Y_n\}$ を確率変数列とし, Y_n はポアソン分布 $p(n)$ に従う確率変数とする.
$\dfrac{Y_n}{n}\xrightarrow{p}1\ (n\to\infty)$ を示せ.

問題 2 $\{X_n\}$ を互いに独立に, 次の確率密度関数を持つ連続型分布に従う確率変数列とし,
$V_n=\min\limits_{i\le n}X_i, Z_n=n^2V_n$ と定義する.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{その他}\end{cases}$$

(1) $V_n\xrightarrow{d}0\ (n\to\infty)$ を示せ.

(2) $n\to\infty$ のときの, Z_n 極限分布の分布関数と確率密度関数を求めよ.

問題 3 ある町では, 住民の 64 %が町長の政策を支持している. この町から無作為に選んだ人が町長の政策を指示していれば $X=1$, 指示していなければ $X=0$ とする.

(1) X の母集団分布の分布関数のグラフを描け.

(2) $X_1,\ldots,X_n$ を, この母集団分布からのランダム標本とする. $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とするとき, S_n の平均と標準偏差を求めよ.

(3) 町の人口は十分に大きいとする. この町から 100 人を無作為に選んだとき, 町長の政策を指示している人が 70 人以下である確率は, 標準正規分布関数 Φ を用いて Φ(ア) によって近似できる. ア に入る数を答えよ.

問題 4 X_1,X_2,X_3 を互いに独立に, 指数分布 $Ex(1)$ に従う確率変数とし, その順序統計量を $X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}$ とする.

(1) $Y=\dfrac{X_1}{X_2}$ の確率密度関数を求めよ.

(2) $X_{(2)}$ の確率密度関数を求めよ.

分布名	分布の記号	確率密度関数	取り得る値 (の範囲)
2 項分布	$B(n,p)$	$f(x)=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$	$x=0,1,\ldots,n$
ポアソン分布	$p(\lambda)$	$f(x)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$	$x=0,1,2,\cdots$
指数分布	$Ex(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$(x>0)$

問題 1 (1) テキスト 4 章演習問題 4.1-1 (解答は 345 ページ)

(2) $\psi_B(t; n, \frac{\lambda}{n}) = \{1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\}^n \to \psi_p(t; \lambda)$

(3) $\mathrm{E}[\frac{Y_n}{n}] = \frac{n}{n} = 1, \mathrm{Var}[\frac{Y_n}{n}] = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, チェビシェフの不等式

問題 2 (1) $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{x}$

$\lim_{n\to\infty} 1 - \{1 - \sqrt{v}\}^n \to 1 \ (0 < v < 1)$

$\lim_{n\to\infty} F_{V_n}(v) = 1 \ (v > 0),\ 0 \ (v \leq 0)$

(2) $F_{Z_n}(z) = F_{V_n}(\frac{z}{n^2}) = 1 - \{1 - \frac{\sqrt{z}}{n}\}^n \to 1 - e^{-\sqrt{z}}$

$f_{Z_n}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}$

問題 3 (1) 原点で $F(0) = 0.36, F(1) = 1$

(2) $\mathrm{E}(S_n) = 0.64n, \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)} = \sqrt{0.36 \times 0.64n} = 0.48\sqrt{n}$

(3) $\frac{70 - 64}{\sqrt{100 \times 0.36 \times 0.64}} = \frac{6}{10 \times 0.6 \times 0.8} = \frac{5}{4}$

問題 4 (1) $f(x) = e^{-x}, \qquad F(x) = \int_0^x e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_1 \leq yX_2) &= \int_0^\infty e^{-x_2} \int_0^{yx_2} e^{-x_1} dx_1 dx_2 \\
f_Y(y) = \frac{d}{dy}\mathrm{P}(X_1 \leq yX_2) &= \int_0^\infty e^{-x_2} x_2 e^{-yx_2} dx_2 \\
&= \int_0^\infty e^{-(1+y)x_2} x_2 dx_2 = \left[-\frac{e^{-(1+y)x_2}}{1+y} x_2 \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(1+y)x_2}}{1+y} dx_2 \\
&= \left[-\frac{e^{-(1+y)x_2}}{(1+y)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{(1+y)^2} \quad (y > 0)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
F_{X_{(2)}}(x_2) &= \mathrm{P}(X_{(2)} \leq x_2) \\
&= 3\mathrm{P}(X_1 \leq x_2, X_2 \leq x_2, X_3 > x_2) + \mathrm{P}(X_1 \leq x_2, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_2) \\
&= 3\{1 - e^{-x_2}\}^2 e^{-x_2} + \{1 - e^{-x_2}\}^3 \\
f_{X_{(2)}}(x_2) &= 6(1 - e^{-x_2})(e^{-x_2})^2 - 3\{1 - e^{-x_2}\}^2 e^{-x_2} + 3\{1 - e^{-x_2}\}^2 e^{-x_2} \\
&= 6(1 - e^{-x_2}) e^{-2x_2}
\end{aligned}
$$