練習問題

2016.12.9

問題 1 $X_1, X_2, \ldots, X_{2m}$ は独立な確率変数で, $0 < x \leq 1$ のとき,

$$\mathrm{P}(X_{2k} \leq x) = 2\int_0^x t\,dt, \quad \mathrm{P}(X_{2k-1} \leq x) = \int_0^x dt \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

とし, $Y_m = \dfrac{1}{2m}\displaystyle\sum_{j=1}^{2m} X_j$ とおく.

(1) $\mu_m = \mathrm{E}(Y_m), \sigma_m^2 = \mathrm{Var}(Y_m)$ を求めよ.

(2) $Y_m - \mu_m \xrightarrow{p} 0$ $(m \to \infty)$ を示せ.

(3) $Z_m = \dfrac{Y_m - \mu_m}{\sqrt{\sigma_m^2}}$ とおくとき, $Z_m \xrightarrow{d} N(0,1)$ $(m \to \infty)$ を示せ.
(中心極限定理, スラスキーの定理等は証明なしに用いてよい.)

問題 2 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とする. $X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立であるための必要十分条件は, $\boldsymbol{\Sigma}$ が対角行列であることを示せ.

問題 3 $X_1, \ldots, X_n$ を母集団分布の分布関数が $F(x)$ である母集団からのランダム標本とし. $F_n(x)$ を経験分布関数とする. 実変数 x に対して $F_n(x) \xrightarrow{p} F(x)$ $(n \to \infty)$ を証明せよ.

問題 4 X, Y は独立で, それぞれ, 自由度 m, n のカイ 2 乗分布に従う確率変数とする. $R = \dfrac{X}{Y}$ の確率密度関数を求めよ.

問題 5 $X_1, \ldots, X_n$ を母集団分布の分布関数が $F(x)$ である母集団からのランダム標本とし. $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ をその順序統計量とする.

(1) $n = 4$ のとき, $X_{(3)}$ の分布関数を $F(x)$ を用いて表せ.

(2) 母集団分布は連続型で, その確率密度関数を $f(x)$ とする. $n = 4$ のとき, $X_{(3)}$ の確率密度関数を $F(x), f(x)$ を用いて表せ.

ただし, 定理 6.11 を用いずに, その証明を参考に導出すること.