

以下の問題の解答をレポート用紙にまとめ、学生番号、氏名、提出日時を記した表紙をつけて閉じ、11月10日(木)までに数学事務室カウンター前の所定の場所に提出すること。

問題1 $\{X_n\}$ を確率変数列とする。 $E[X_n^2] < \infty$ であり、
 X_n の特性関数は $\varphi_n(t) = \exp\{n^{-1}(e^{it} - 1)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) であるとする。

- (1) X_n の平均と分散を n を用いて表わせ。
- (2) $n \rightarrow \infty$ のとき、 X_n は 0 に確率収束することを示せ。

問題2 X を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の(実数値)確率変数とする。 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する実数列とし、 $Y_n = a_n X$ ($n = 1, 2, \dots$) と定義すると、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 Y_n は 0 に概収束することを示せ。

問題3 $\{X_n\}$ を確率変数列とする。 X_n の特性関数は $\psi_n(t) = \exp(itc - |t|/n)$ ($n = 1, 2, \dots$) であるとする。ただし、 c は定数である。

- (1) $E[|X_n|]$ は存在するか？理由をつけて答えよ。
- (2) 点 c に退化した分布 $U(c)$ の特性関数を求めよ。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき、 X_n は $U(c)$ に分布収束することを示せ。

問題4 $\{X_n\}$ を互いに独立に、区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数列とし、

$$V_n = \min_{i \leq n} X_i, \quad Z_n = nV_n$$

と定義する。

- (1) $V_n \xrightarrow{d} 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示せ。(ヒント: $P(V_n > v)$ を考える.)
- (2) $Z_n \xrightarrow{d} Ex(1)$ ($n \rightarrow \infty$) を示せ。

問題5 $\{X_n\}$ を互いに独立に、区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数列とする。

- (1) $E(X_n), \text{Var}(X_n)$ の値を計算せよ。
- (2) 中心極限定理を用いると、 n の値が大きいときには標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて、

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) \approx \Phi(\text{ア})$$

と近似できる。アに入るべき式を書け。

問題6 次の表は、ある幼稚園年長組の視力を測定し、度数分布表にまとめたものである。

視力	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.5	2.0	計
人数	1	1	2	3	2	4	4	3	20

この年中組の園児全員を母集団とするときの、視力の母集団分布を P 、母集団分布関数を $F(x)$ 、母集団分布の確率関数を $f(x)$ とする。

- (1) $F(1.0)$ 、および $f(0.8)$ の値はいくらか。
- (2) 母平均と母分散の値を計算せよ。
- (3) 復元抽出で無作為に 5 人を選び、その視力を X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 とする。

$$\bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i$$

の平均と分散はいくらか?

問題7 ある町では、住民の丁度 3 分の 1 の血液型が A 型であるとする。この町から無作為に選んだ人の血液型が A 型であれば $X = 1$ 、A 型でなければ $X = 0$ とする。

- (1) X の母集団分布の分布関数のグラフを描け。
- (2) X_1, \dots, X_n を、この母集団分布からのランダム標本とする。 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ とするとき、 S_n の平均と分散を求めよ。
- (3) 町の人口は十分に大きいとする。この町から 100 人を無作為に選んだとき、A 型の人が 30 人以下である確率は、標準正規分布関数 Φ を用いて $\Phi(\text{ア})$ によって近似できる。アに入る数を答えよ。