確率・統計 B 練習問題

2018.2.2

問題 1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母集団分布が平均 μ の指数分布であるような母集団からの大きさ $n = 2m - 1$ のランダム標本とする. ただし, m は自然数である.

(1) 標本メディアン $X_{(m)}$ の確率密度関数を求めよ.

(2) U を自由度 m, m のベータ分布に従う確率変数とすると

$$\mathrm{P}(X_{(m)} \leq x) = \mathrm{P}(U \leq 1 - e^{-x/\mu})$$

が成り立つことを示せ.

(3) Y_1, Y_2 を独立に自由度 $2m$ のカイ 2 乗分布に従う確率変数とすると, $\dfrac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$ は自由度 m, m のベータ分布に従う. このことを利用して, $m \to \infty$ のとき, $X_{(m)}$ は母集団分布の中央値, すなわち, $1 - e^{-x_0/\mu} = \dfrac{1}{2}$ を満たす x_0 の値に確率収束することを示せ.

平均 μ の指数分布の確率密度関数 :

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

自由度 p, q のベータ分布の密度関数 :

$$f(u;p,q) = \begin{cases} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} u^{p-1}(1-u)^{q-1} & 0 < u < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

問題 2 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} p(\lambda)$ であるとする. ここで, $p(\lambda)$ は平均が λ であるポアソン分布を表す. ポアソン分布は, 非負の整数値をとる離散型分布で, その確率密度関数は次で与えられる.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & (x = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を用いて, λ の推定量 $\hat{\lambda}_{\boldsymbol{c}}$ を次のように定義する.

$$\hat{\lambda}_{\boldsymbol{c}} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

(1) $\hat{\lambda}_{\boldsymbol{c}}$ が λ の不偏推定量であるための, $\boldsymbol{c}$ の条件を求めよ.

(2) $\hat{\lambda}_{\boldsymbol{c}}$ の分散を λ と $\boldsymbol{c}$ を用いて表わせ.

(3) $\hat{\lambda}_{\boldsymbol{c}}$ の分散が最小となるような $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(4) $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は, 完備十分統計量であることを示せ. (分解定理を用いてよいが, 完備性は定義から示すこと.)

(5) $T = t$ を与えたときの X_1 の条件付き平均は $\frac{t}{n}$ であることを示せ.

(6) $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は λ の一様最小分散不偏推定量である. その根拠を述べよ.

(7) $\bar{X}_n$ は, λ の有効推定量であることを示せ.

(8) $\bar{X}_n$ は, λ の一致推定量であることを示せ.

(9) λ の最尤推定量を求めよ.

(10) $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}}$ の $n \to \infty$ のときの極限分布は何か.

(11) (10) を利用して, λ の水準 95% の近似信頼区間を求めよ. ただし, 標準正規分布の上側 2.5% 点は 1.96 とせよ.

問題 3 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} p(\lambda)$ であるとする.

(1) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda = 2$ に関する仮説検定において,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \Rightarrow H_0 \text{ を棄却} \tag{3.1}$$

という検定は, 有意水準が $\alpha_k = e^{-n}\sum_{j \geq k}^{\infty} \frac{n^j}{j!}$ であるような検定の中で, 検出力が最大となることを示せ.

(2) (3.1) の検定は, 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda > 1$ の, 有意水準 α_k の一様最強力検定であることを示せ.

(3) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda \neq 1$ の尤度比検定統計量を求めよ.

(4) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda \neq 1$ のスコア検定統計量を求めよ.

(5) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda \neq 1$ のワルド検定統計量を求めよ.

解答 1 平均 μ の指数分布の分布関数は

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} dt = \Big[-e^{-t/\mu}\Big]_0^x = 1 - e^{-x/\mu}$$

定理 6.11 より, 標本メディアン $X_{(m)}$ の確率密度関数は

$$g_m(x) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!(m-1)!} \{1 - e^{-x/\mu}\}^{m-1} \{e^{-x/\mu}\}^{m-1} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$$

$$\mathrm{P}(X_{(m+1)} \leq y) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!(m-1)!} \int_{-\infty}^{y} \{1 - e^{-x/\mu}\}^{m-1} \{e^{-x/\mu}\}^{m-1} dx$$

$$= \frac{(2m-1)!}{(m-1)!(m-1)!} \int_0^{1-e^{-y/\mu}} t^{m-1}(1-t)^{m-1} dt \quad (t = 1 - e^{-x/\mu} \text{ と変数変換 })$$