確率・統計 B

平成 29 年 10 月 6 日

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする.

$\mathrm{P}(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) \geq \mathrm{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n)$ を示せ.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \quad (B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$$

と表すと $B_n \supset B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるから $\mathrm{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n)$

また,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad (C_n := \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m)$$

と表すと $C_n \subset C_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるから $\mathrm{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n)$

$C_n \subset A_n \subset B_n$ より $\mathrm{P}(C_n) \leq \mathrm{P}(A_n) \leq \mathrm{P}(B_n)$ であるから

$$\mathrm{P}(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \leq \mathrm{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)$$