確率・統計 B

平成 29 年 10 月 13 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $\{X_n\}$ を互いに独立に, 次の確率密度関数を持つ連続型分布に従う確率変数列とし, $V_n = \min_{i \le n} X_i, Z_n = \sqrt{n} V_n$ と定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{その他} \end{cases}$$

(1) $V_n \xrightarrow{d} 0\ (n \to \infty)$ を示せ.

(2) $n \to \infty$ のときの, Z_n の極限分布の分布関数を求めよ.

X_j の分布関数は $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & ,x \leq 0 \\ \left[t^2\right]_0^x & ,0 < x < 1 \\ 1 & ,x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,x \leq 0 \\ x^2 & ,0 < x < 1 \\ 1 & ,x \geq 1 \end{cases}$ となる

$$\mathrm{P}(V_n > v) = \mathrm{P}(X_1 > v, \ldots, X_n > v) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j > v) = \begin{cases} 0 & ,v \geq 1 \\ \{1 - v^2\}^n & ,0 < v < 1 \\ 1 & ,v \leq 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 0 & ,v > 0 \\ 1 & ,v \leq 0 \end{cases}, \quad F_{V_n}(v) = 1 - \mathrm{P}(V_n > v) \to \begin{cases} 1 & ,v > 0 \\ 0 & ,v \leq 0 \end{cases}$$

これは $U(0)$ の分布関数であるから, $V_n \xrightarrow{d} 0$

(確率 1 で 0 をとる確率変数と, 定数 0 を同一視している.)

$$\mathrm{P}(Z_n \leq z) = \mathrm{P}(\sqrt{n} V_n \leq z) = \mathrm{P}\left(V_n \leq \frac{z}{\sqrt{n}}\right) = \begin{cases} 1 & ,\dfrac{z}{\sqrt{n}} \geq 1 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{z^2}{n}\right)^n & ,0 < \dfrac{z}{\sqrt{n}} < 1 \\ 0 & ,\dfrac{z}{\sqrt{n}} \leq 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 1 - e^{-z^2} & ,z > 0 \\ 0 & ,z \leq 0 \end{cases}$$

したがって Z_n 極限分布関数は $F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z^2} & ,z > 0 \\ 0 & ,z \leq 0 \end{cases}$