確率・統計B

平成 29 年 10 月 27 日

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ とする．このとき

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \ (n \to \infty)$$

を証明せよ．

$$
\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2\right\} \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{X_j - \mu - (\bar{X}_n - \mu)\right\}^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2 - 2(\bar{X}_n - \mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu) + (\bar{X}_n - \mu)^2\right\} \\
&= \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2\right\}
\end{aligned}
$$

大数の法則より

$$
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2 \xrightarrow{p} \mathrm{E}[(X_1 - \mu)^2] = \sigma^2,
$$

スラスキーの定理より $S_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$