確率・統計 B

平成 29 年 12 月 22 日

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ とし, S_n^2 を標本分散とする. $(n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ であることを用いて, 次の仮説の有意水準 α 仮説検定方法を求めよ. ただし, $\chi^2_{n-1}(\alpha)$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の上側 α 点とする.

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{対立仮説 } H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

S_n^2/σ_0^2 の値が大きい程, H_0 は疑わしいと考えられるので $S_n^2/\sigma_0^2 > c$ のとき, H_0 を棄却する. 有意水準を α とするためには

$$\mathrm{P}\Big(\frac{S_n^2}{\sigma_0^2} > c\Big) = \mathrm{P}\Big(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > (n-1)c\Big) = 1 - G_{n-1}((n-1)c)$$

ここで, $G_{n-1}(x)$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の分布関数である.

$1 - G_{n-1}((n-1)c) = \alpha$ より, $(n-1)c = \chi_{n-1}^2(\alpha)$ であれば良いから $c = \dfrac{\chi_{n-1}^2(\alpha)}{n-1}$.

したがって, 求める検定方法は, 次のようになる.

$$S_n^2 > \frac{\chi_{n-1}^2(\alpha)}{n-1}\sigma_0^2 \ \Rightarrow\ \text{棄却}$$

次のように書いても同じである.

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha) \ \Rightarrow\ \text{棄却}$$