確率・統計 B レポート問題

2017.11.01

以下の問題の解答をレポート用紙にまとめ, 学生番号, 氏名, 提出日時を記した表紙をつけて閉じ, 11 月 24 日 (金) までに数学事務室カウンター前の所定の場所に提出すること.

問題 1 $\{X_n\}$ を確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ であり, X_n の特性関数は $\varphi_n(t) = \exp\{n^{-1}(e^{it} - 1)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるとする.

(1) X_n の平均と分散を n を用いて表わせ.

(2) $n \to \infty$ のとき, X_n は 0 に確率収束することを示せ.

問題 2 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の (実数値) 確率変数とする. $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $n \to \infty$ のとき 0 に収束する実数列とし, $Y_n = a_n X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と定義すると, $n \to \infty$ のとき, Y_n は 0 に概収束することを示せ.

問題 3 $\{X_n\}$ を確率変数列とする. X_n の特性関数は $\psi_n(t) = \exp(itc - |t|/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるとする. ただし, c は定数である.

(1) $\mathrm{E}[|X_n|]$ は存在するか? 理由をつけて答えよ.

(2) 点 c に退化した分布 $\mathrm{U}(c)$ の特性関数を求めよ.

(3) $n \to \infty$ のとき, X_n は $\mathrm{U}(c)$ に分布収束することを示せ.

問題 4 $\{X_n\}$ を互いに独立に, 区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数列とし,

$$V_n = \min_{i \le n} X_i, \quad Z_n = nV_n$$

と定義する.

(1) $V_n \xrightarrow{d} 0$ $(n \to \infty)$ を示せ. (ヒント: $\mathrm{P}(V_n > v)$ を考える.)

(2) $Z_n \xrightarrow{d} Ex(1)$ $(n \to \infty)$ を示せ.

問題 5 $\{X_n\}$ を互いに独立に, 区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数列とする.

(1) $\mathrm{E}(X_n), \mathrm{Var}(X_n)$ の値を計算せよ.

(2) 中心極限定理を用いると, n の値が大きいときには 標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて,

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) \approx \Phi(\text{ア})$$

と近似できる. アに入るべき式を書け.

問題 6 次の表は, ある幼稚園年長組の視力を測定し, 度数分布表にまとめたものである.

視力	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.5	2.0	計
人数	1	1	2	3	2	4	4	3	20

この年中組の園児全員を母集団とするときの, 視力の母集団分布を P, 母集団分布関数を $F(x)$, 母集団分布の確率関数を $f(x)$ とする.

(1) $F(1.0)$, および $f(0.8)$ の値はいくらか.

(2) 母平均と母分散の値を計算せよ.

(3) 復元抽出で無作為に 5 人を選び, その視力を X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 とする.

$$\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$$

の平均と分散はいくらか?

問題 7 ある町では, 住民の丁度 3 分の 1 の血液型が A 型であるとする. この町から無作為に選んだ人の血液型が A 型であれば $X = 1$, A 型でなければ $X = 0$ とする.

(1) X の母集団分布の分布関数のグラフを描け.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ を, この母集団分布からのランダム標本とする. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとき, S_n の平均と分散を求めよ.

(3) 町の人口は十分に大きいとする. この町から 100 人を無作為に選んだとき, A 型の人が 30 人以下である確率は, 標準正規分布関数 Φ を用いて Φ(ア) によって近似できる. ア に入る数を答えよ.