確率・統計 B
仮説検定

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/probstatB17/index.shtml

2018.1.19

table of contents

仮説検定問題 (1/3)

一般的な仮説検定問題

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \in \mathcal{P} = \{\mathsf{P}_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

$$(\Theta_0 \subset \Theta, \Theta_1 \subset \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$$

単純仮説：仮説で指定されるパラメータの値が 1 個の場合
$(H_0 : \theta = \theta_0, \quad \Theta_0 = \{\theta_0\})$

複合仮説：単純仮説でない仮説

棄却域：ある検定方法を定めたとき，その検定方法によって帰無仮説が棄却されるような実現値の全体からなる集合.

仮説検定問題 (2/3)

検定方法と棄却域の対応

$\mathscr{W} \subset \mathbb{R}^n$ と, $\boldsymbol{X}$ の実現値 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \mathscr{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却} \\ \boldsymbol{x} \notin \mathscr{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却しない} \end{cases}$$

という検定方法を考えると, この検定方法の棄却域は $\mathscr{W}$ となる.

2 種類の過誤と過誤確率

$\mathscr{W}$ をある検定の棄却域とする

第 1 種の過誤 $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in \mathscr{W} \mid \theta \in \Theta_0)$

第 2 種の過誤 $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \notin \mathscr{W} \mid \theta \in \Theta_1)$

仮説検定問題 (3/3)

$\beta(\theta) = \mathrm{P}(\mathscr{W} \mid \theta)$ とおくとき

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$$

であるような検定を, 有意水準 α の検定という

最適化問題

有意水準 α の検定の中で, 第 2 種の過誤確率を最小にしたい
有意水準 α の検定の中で, $\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を最大にする.

確率化検定 (1/2)

最強力検定

$$\mathscr{W}_c = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_1) \geq c\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_0)\}$$

c の値は, $\beta(\theta_0) = \alpha$ となるように決める.

離散型の場合, $\beta(\theta_0) = \alpha$ となる c が存在するとは限らない

例 $X \sim B(n, p)$

帰無仮説 $H_0 : p = p_0$,　対立仮説 $H_1 : p = p_1\ (> p_0)$

の最強力検定の棄却域は $\mathscr{W}_c = \{x;\ x > c'\}$ と表される.

メモ用紙

確率化検定 (2/2)

例 (続き) $X \sim B(10, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad \text{対立仮説 } H_1 : p = p_1 \ (> \frac{1}{2})$$

$$\alpha = 0.05 \text{ の場合}, \ \beta\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0.01074 & (9 \geq c > 8) \\ 0.05469 & (8 \geq c > 7) \end{cases}$$

$$q = \frac{0.05 - \mathsf{P}(X > 8 \,|\, p = \frac{1}{2})}{\mathsf{P}(X > 8 \,|\, p = \frac{1}{2})} = 0.08933$$

として, $x = 9, 10$ のときは必ず棄却,
$x = 8$ のときは, 確率 q で棄却, 確率 $1 - q$ で採択すれば有意水準 5% の検定となる. このような検定を確率化検定と呼ぶ.

尤度比検定

定義 8.4

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$: n 次元確率変数
$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$: その確率密度関数 $(\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 (\subset \Theta), \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$$

に対して,

$$\lambda = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})} < c$$

のとき, H_0 を棄却する検定を尤度比検定と呼ぶ.
また, λ を尤度比規準と呼ぶ.
c は有意水準に応じて定められる.

単純仮説の場合 (1/3)

以下, $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} f(x, \theta)$ とする.

$\Theta_0 = \{\theta_0\}$ の場合

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}_0)}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \boldsymbol{\theta})}$$

棄却域の決め方

帰無仮説 H_0 が正しいとき, 適当な正則条件の下で

$$-2 \log \lambda \xrightarrow{d} \chi_p^2$$

が成り立つので, 有意水準が α となる検定は次のように近似できる. (テキストの補遺 C 参照)

$$-2 \log \lambda > \chi_p^2(\alpha) \Rightarrow \text{棄却} \ (\chi_p^2(\alpha) \text{ は上側 } \alpha \text{ 点 })$$

単純仮説の場合 (2/3)

最尤推定量に基づく検定

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$：$\Theta$ での $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \mathrm{argmax}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \boldsymbol{\theta})$$

$J(\boldsymbol{\theta})$：フィッシャー情報量行列

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{E}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\log f(X_1, \boldsymbol{\theta})\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\log f(X_1, \boldsymbol{\theta})\right\}'\right]$$

$$T_W \equiv n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)' J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) > \chi^2_p(\alpha) \Rightarrow \text{棄却}$$

は適当な正則条件の下で，有意水準が近似的に α となる．
これをワルド検定と呼ぶ．（テキストの補遺 C 参照）

単純仮説の場合 (3/3)

スコア関数に基づく検定

$$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

をスコア関数と呼ぶ.

$$T_S \equiv \frac{1}{n}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)\}' J(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)\} > \chi^2_p(\alpha) \Rightarrow \text{棄却}$$

は適当な正則条件の下で, 有意水準が近似的に α となる.
これをスコア検定と呼ぶ. (テキストの補遺 C 参照)

多項分布に関する検定 (1/4)

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \overset{i.i.d.}{\sim} M_m(1, \boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = (p_1, \ldots, p_{m-1})'$

$g(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n; \boldsymbol{\theta})$: $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ の同時確率密度関数

$$g(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^m p^{\sum_{i=1}^n z_{ij}}, & \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n \in \mathscr{Z} \\ 0, & \text{その他} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \mathscr{Z} &= \{(1, 0, \ldots, 0)', (0, 1, 0, \ldots, 0)', \ldots, (0, \ldots, 0, 1)'\} \\ &= \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m \\ p_j &= \mathsf{P}(\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{e}_j) \ (j = 1, \ldots, m-1), \\ p_m &= \mathsf{P}(\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{e}_m) = 1 - (p_1 + \cdots + p_{m-1}) \end{aligned}$$

多項分布に関する検定 (2/4)

対数尤度関数：$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n) = \sum_{j=1}^{m} x_j \log p_j - \log \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} x_j!}$,

スコア関数：$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log g(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \Big(\ldots, \underbrace{\frac{x_j}{p_j} - \frac{x_m}{p_m}}_{\text{第 } j \text{ 成分}}, \ldots\Big)'$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{z}_i = (x_1, \ldots, x_m)'$$

フィッシャー情報量行列：$J(\boldsymbol{\theta}) = (J_{ij}(\boldsymbol{\theta}))_{i,j=1,\ldots,m-1}$,

$$J_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{n}{p_i} + \frac{n}{p_m}, & i = j \\ \frac{n}{p_m}, & i \neq j \end{cases}$$

多項分布に関する検定 (3/4)

$\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{argmax}} \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n) = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{m-1})' = \left(\frac{x_1}{n}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{n}\right)'$$

仮説検定問題

帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 = (q_1, \ldots, q_{m-1})'$, 対立仮説 $H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$

尤度比規準

$$\begin{aligned} -2\log\lambda &= -2\log\frac{g(\boldsymbol{\theta}_0; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n)}{g(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n)} \\ &= 2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n) - \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n) = 2\sum_{j=1}^{m} x_j \log\frac{x_j}{nq_j} \end{aligned}$$

多項分布に関する検定 (4/4)

スコア検定

$$T_S = n^{-1}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)\}' J(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)\} = \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_j - nq_j)^2}{nq_j}$$

多項分布に対するスコア検定をカイ 2 乗検定と呼ぶ.

ワルド検定

$$T_W = n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)' J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_j - nq_j)^2}{x_j}$$

多項分布に対するワルド検定を修正カイ 2 乗検定と呼ぶ.

※ $-2\log\lambda, T_S, T_W$ のいずれも, $\chi^2_{m-1}(\alpha)$ より大きいときに棄却する.