確率・統計 B
仮説検定

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/probstatB17/index.shtml

2018.1.26

table of contents

関数構造の検定 (1/4)

例 8.8

母集団分布：$N_p((\mu_1, \ldots, \mu_p)', \sigma^2 I_p)$
帰無仮説：$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p,\ \ \sigma^2$ は未知
対立仮説：$H_1 : \mu_1, \ldots, \mu_p$ は任意, σ^2 は未知

$$\Theta = \{(\mu_1, \ldots, \mu_p, \sigma^2)';\ \mu_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, \ldots, p), \sigma^2 > 0\},$$
$$\Theta_0 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_1, \xi_2)';\ \xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 > 0\}$$

とすると,

$$H_0 : (\mu_1, \ldots, \mu_p, \sigma^2)' \in \Theta_0,\ \ H_1 : (\mu_1, \ldots, \mu_p, \sigma^2)' \in \Theta$$

となる.

関数構造の検定 (2/4)

仮説検定問題

$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$,

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

ただし, $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \in \Theta;\ \boldsymbol{\xi} \in \Xi\}$, $(\Xi \subset \mathbb{R}^q,\ q < p)$.

尤度比規準

$$\lambda = \frac{\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}))}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta})}$$

関数構造の検定 (3/4)

ワルド検定統計量

$$T_W = n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))' J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_n$ ただし $\boldsymbol{\xi}$ の最尤推定量,　$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ただし $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量

$$\prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n)) = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})),$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta})),$$

関数構造の検定 (4/4)

スコア検定統計量

$$T_S = \frac{1}{n}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))\}' J(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))^{-1}\{\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))\}$$

適当な正則条件の下で,

$$-2\log\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{p-q}, \quad T_S \xrightarrow{d} \chi^2_{p-q}, \quad T_W \xrightarrow{d} \chi^2_{p-q} \quad (n \to \infty)$$

※ $-2\log\lambda, T_S, T_W$ のいずれも, $\chi^2_{p-q}(\alpha)$ より大きいときに棄却する.

分割表 (1/2)

分割表
選択形式のアンケート調査結果を選択パターンによって分類し，表にまとめたもの．

アイテム：質問項目
カテゴリー：各アイテムごとの選択肢

例 (性別と政党の支持・不支持)　無作為に n 人を選んで，性別とある政党を支持するかどうか調査
アイテム：「性別」と「支持するかどうか」
カテゴリー：「性別」のカテゴリーは「男」と「女」

分割表 (2/2)

例 (性別と政党の支持・不支持)

	支持	不支持	計
男	N_{11}	N_{12}	$N_{1\cdot}$
女	N_{21}	N_{22}	$N_{2\cdot}$
計	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	n

N_{11} : 性別が男で, 政党を支持すると答えた人数
N_{21} : 性別が女で, 政党を支持すると答えた人数
N_{12} : 性別が男で, 政党を支持しないと答えた人数
N_{22} : 性別が女で, 政党を支持しないと答えた人数
$N_{i\cdot} = N_{i1} + N_{i2}, N_{\cdot j} = N_{1j} + N_{2j} \ (i, j = 1, 2)$

※ アイテムの個数が２個で, それぞれのアイテムのカテゴリーの個数が k 個, l 個であるとき, $k \times l$ 分割表 という.

独立性の検定 (1/7)

独立性

I_1, I_2 : アイテム
$C_{11}, \ldots, C_{1k}$: I_1 のカテゴリー, $C_{21}, \ldots, C_{2l}$: I_2 のカテゴリー

無作為に選んだ人が カテゴリー C_{1i} に該当するとき, $X_1 = i$, カテゴリー C_{2j} に該当するとき, $X_2 = j$ とする.

確率変数 X_1, X_2 が独立であるとき, アイテム I_1, I_2 は独立であるという.

独立性の検定 (2/7)

独立性の検定

$p_{ij} = \mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j)$
$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} p_{ij},\ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$
とすると, アイテム I_1, I_2 の独立性は次の仮説が成り立つことである.

$$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \quad (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l)$$

$(N_{11}, N_{12}, \ldots, N_{kl})'$ の分布は多項分布 $M_{kl}(n, \boldsymbol{\theta})$,

$$\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{k,l-1})'$$

$\boldsymbol{\xi} = (p_{1\cdot}, p_{2\cdot}, \ldots, p_{(k-1)\cdot}, p_{\cdot 1}, p_{\cdot 2, \ldots, p_{\cdot (l-1)}})'$, とすると

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = (p_{1\cdot}p_{\cdot 1}, p_{1\cdot}p_{\cdot 2}, \ldots)'$$

独立性の検定 (3/7)

2×2 分割表の場合

$(N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22})' \sim Mt_4(n; \boldsymbol{\theta})$
$\boldsymbol{\theta} = (p_{11}, p_{12}, p_{21})' \in \Theta$,
$\Theta = \{(p_{11}, p_{12}, p_{21})';\ p_{11} \geq 0, p_{12} \geq 0, p_{21} \geq 0, p_{11}+p_{12}+p_{21} \leq 1\}$

確率密度関数は

$$f(n_{11}, n_{12}, n_{21}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{n!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}!} p_{11}^{n_{11}} p_{12}^{n_{12}} p_{21}^{n_{21}} p_{22}^{n_{22}},$$

$$p_{22} = 1 - p_{11} - p_{12} - p_{21},\ n_{22} = n - n_{11} - n_{12} - n_{21}$$

帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi});\ \boldsymbol{\xi} \in \Xi\}$, 対立仮説 $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta$

$$\Xi = \{(\xi_1, \xi_2)';\ 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1\}$$
$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1\xi_2, \xi_1(1-\xi_2), (1-\xi_1)\xi_2)'$$

独立性の検定 (4/7)

対数尤度関数：

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; n_{11}, n_{12}, n_{21}) = n_{11}\log p_{11} + n_{12}\log p_{12} + n_{21}\log p_{21} + n_{22}\log(1 - p_{11} - p_{12} - p_{21}) + \log\frac{n!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}1}$$

スコア関数：$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{n_{11}}{p_{11}} - \frac{n_{22}}{p_{22}}, \frac{n_{12}}{p_{12}} - \frac{n_{22}}{p_{22}}, \frac{n_{21}}{p_{21}} - \frac{n_{22}}{p_{22}}\right)'$

フィッシャー情報量行列：$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{p_{11}} + \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{22}} \\ \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{12}} + \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{22}} \\ \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{22}} & \frac{n}{p_{21}} + \frac{n}{p_{22}} \end{pmatrix}$

独立性の検定 (5/7)

$\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{N_{11}}{n}, \frac{N_{12}}{n}, \frac{N_{21}}{n}\right)'$$

$\boldsymbol{\xi}$ の最尤推定量

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}); N_{11}, N_{12}, N_{21}) &= N_{11}\log(\xi_1\xi_2) + N_{12}\log\{\xi_1(1-\xi_2)\} \\
&\quad + N_{21}\log\{(1-\xi_1)\xi_2\} + N_{22}\log\{(1-\xi_1)(1-\xi_2)\} \\
&\quad + \log\frac{n!}{N_{11}!N_{12}!N_{21}!N_{22}1} \\
&= N_{1\cdot}\log\xi_1 + N_{\cdot 1}\log\xi_2 + N_{2\cdot}\log(1-\xi_1) + N_{\cdot 2}\log(1-\xi_2) \\
&\quad + \log\frac{n!}{N_{11}!N_{12}!N_{21}!N_{22}1}
\end{aligned}$$

$$\hat{\xi} = \left(\frac{N_{1\cdot}}{n}, \frac{N_{\cdot 1}}{n}\right)'$$

メモ用紙

メモ用紙

独立性の検定 (6/7)

尤度比規準

$$
\begin{aligned}
-2\log\lambda &= 2N_{11}\log\frac{nN_{11}}{N_{1\cdot}N_{\cdot 1}} + 2N_{12}\log\frac{nN_{12}}{N_{1\cdot}N_{\cdot 2}} \\
&\quad + 2N_{21}\log\frac{nN_{21}}{N_{2\cdot}N_{\cdot 1}} + 2N_{22}\log\frac{nN_{22}}{N_{2\cdot}N_{\cdot 2}}
\end{aligned}
$$

スコア検定統計量 (カイ２乗検定)

$$
\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(nN_{ij} - N_{i\cdot}N_{\cdot j})^2}{nN_{i\cdot}N_{\cdot j}}
$$

ワルド検定統計量 (修正カイ２乗検定)

$$
\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(nN_{ij} - N_{i\cdot}N_{\cdot j})^2}{n^2 N_{ij}}
$$

独立性の検定 (7/7)

$k \times l$ 分割表の場合

尤度比規準

$$-2\log\lambda = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} N_{ij}\log\frac{nN_{ij}}{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}$$

スコア検定統計量 (カイ 2 乗検定)

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(nN_{ij} - N_{i\cdot}N_{\cdot j})^2}{nN_{i\cdot}N_{\cdot j}}$$

ワルド検定統計量 (修正カイ 2 乗検定)

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(nN_{ij} - N_{i\cdot}N_{\cdot j})^2}{n^2 N_{ij}}$$

※ いずれも, $\chi^2_{(k-1)(l-1)}(\alpha)$ より大きいときに棄却する.

2 項分布の同等性検定 (1/5)

例 (性別と政党の支持・不支持)

男性 n_1 人, 女性 n_2 人を無作為に選ぶ場合.

	支持	不支持	計
男	N_{11}	N_{12}	n_1
女	N_{21}	N_{22}	n_2
計	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	n

N_{11} : 性別が男で, 政党を支持すると答えた人数
N_{21} : 性別が女で, 政党を支持すると答えた人数
N_{12} : 性別が男で, 政党を支持しないと答えた人数
N_{22} : 性別が女で, 政党を支持しないと答えた人数

p_1 : 男性を無作為に選んだとき, 支持すると答える確率
p_2 : 女性を無作為に選んだとき, 支持すると答える確率

$$N_{11} \sim B(n_1, p_1), \quad N_{21} \sim B(n_2, p_2), \ N_{11}, N_{21} \text{ は独立}$$

２項分布の同等性検定 (2/5)

N_{11}, N_{21} の同時確率密度関数

$$f(n_{11}, n_{21};\ \boldsymbol{\theta}) = \frac{n_1!}{n_{11}!n_{12}!} p_1^{n_{11}} (1-p_1)^{n_{12}} \frac{n_2!}{n_{21}!n_{22}!} p_2^{n_{21}} (1-p_2)^{n_{22}}$$

$$\boldsymbol{\theta} = (p_1, p_2)', \quad n_{12} = n_1 - n_{11}, \quad n_{22} = n_2 - n_{21}$$

帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta$

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta}(\xi);\ 0 \le \xi \le 1\} \quad (\boldsymbol{\theta}(\xi) = (\xi, \xi)')$$

$$\Theta = \{(p_1, p_2)';\ 0 \le p_1 \le 1, 0 \le p_2 \le 1\}$$

2 項分布の同等性検定 (3/5)

対数尤度関数：

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; n_{11}, n_{21}) = n_{11}\log p_1 + n_{12}\log(1-p_1) + n_{21}\log p_2 + n_{22}\log(1-p_2) + \log\frac{n_1!n_2!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}1}$$

スコア関数：$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{n_{11}}{p_1} - \frac{n_{12}}{1-p_1},\ \frac{n_{21}}{p_2} - \frac{n_{22}}{1-p_2}\right)'$

フィッシャー情報量行列：$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{1-p_1} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_2}{1-p_2} \end{pmatrix}$

2 項分布の同等性の検定 (4/5)

$\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{N_{11}}{n_1}, \frac{N_{21}}{n_2}\right)'$$

ξ の最尤推定量

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}); N_{11}, N_{21}) = (N_{11} + N_{21}) \log \xi + (N_{12} + N_{22}) \log(1 - \xi) \\ + \log \frac{n_1!n_2!}{n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}1}\end{aligned}$$

$$\hat{\xi} = \frac{N_{11} + N_{21}}{n_1 + n_2} = \frac{N_{\cdot 1}}{n}$$

メモ用紙

メモ用紙

2 項分布の同等性の検定 (5/5)

尤度比規準

$$-2\log\lambda = 2N_{11}\log\frac{nN_{11}}{n_1N_{\cdot 1}} + 2N_{12}\log\frac{nN_{12}}{n_1N_{\cdot 2}} + 2N_{21}\log\frac{nN_{21}}{n_2N_{\cdot 1}} + 2N_{22}\log\frac{nN_{22}}{n_2N_{\cdot 2}}$$

スコア検定統計量 (カイ 2 乗検定)

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(nN_{ij} - N_{i\cdot}N_{\cdot j})^2}{nn_iN_{\cdot j}}$$

ワルド検定統計量 (修正カイ 2 乗検定)

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(nN_{ij} - n_iN_{\cdot j})^2}{n^2N_{ij}}$$

独立性の検定統計量で $N_{i\cdot} = N_{i1} + N_{i2}$ を n_i で置き換えたもの