確率・統計 B
確率変数と分布の収束

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2017.10.13

table of contents

確率収束 (1/6)

ベルヌーイ試行

条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行を,
成功率 p, 反復回数 n の**ベルヌーイ試行** とよぶ.

(1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.

(2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.

(3) 事象 A が起こる確率 $(= p)$ は毎回不変である.

成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行において,
事象 A が起こった回数を X とすると

$$X \sim B(n, p) \quad (\text{定理 } 2.8)$$

確率収束 (2/6)

例 5.1

サイコロを何度も振るとき 1 の目のでる比率は $1/6$ に近づく.
ベルヌーイ試行において,

$$X_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こった} \\ 0 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こらなかった} \end{cases}$$

とし,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad (A \text{ が起こる相対頻度})$$

とすると, $\bar{X}_n$ は $n \to \infty$ のとき, $p = \mathrm{P}(A)$ に近づく.

確率収束 (3/6)

- $\bar{X}_n$ が p に近づくことの, 定義は？
  $\Rightarrow$ 確率収束, 概収束
- 近づくことの理論的な裏づけは？
  $\Rightarrow$ 大数の法則
- 例えば, $n = 100, d = 0.1$ に対して, $\mathrm{P}(|\bar{X}_n - p| \leq d)$ の値はどれ位？
  $\Rightarrow$ 分布収束, 中心極限定理

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

$\{X_n\}$: 確率変数列, θ : 定数, X : 確率変数

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0
$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は θ に確率収束するといい,

$$
X_n \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)
$$

とかく.

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0
$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に 確率収束するといい,

$$
X_n \xrightarrow{p} X \quad (n \to \infty)
$$

とかく.

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,
$\mathrm{E}(X_n) = \mu, \mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 \ (n = 1, 2, \ldots)$
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \to \infty)$$

(証明は板書で)

例 5.1 の場合, $\mathrm{E}(X_n) = p$, $\mathrm{Var}(X_n) = p(1-p)$ だから

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} p \quad (n \to \infty)$$

メモ用紙

確率収束 (6/6)

復習 (平均, 分散の性質, 不等式)

(1) $\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}(X) + b\mathsf{E}(Y)$.

(2) $X \leq Y \Rightarrow \mathsf{E}(X) \leq \mathsf{E}(Y)$.

(3) $\mathsf{Var}(aX) = a^2\mathsf{Var}(X)$.

(4) X と Y が独立 $\Rightarrow \mathsf{Var}(X+Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y)$

(5) (チェビシェフの不等式) $\mathsf{E}(X) = \mu$, $\mathsf{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ ならば

$$\mathsf{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

概収束 (1/6)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

$\{X_n\}$: 確率変数列, X : 確率変数
$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$^{\exists}E \subset \Omega \text{ s.t. } \mathrm{P}(E) = 0,\ ^{\forall}\omega \in \Omega_0 = \Omega - E \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといい,

$$X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$$

とかく.

概収束 (2/6)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$
\begin{aligned}
A_n(\varepsilon) &= \{\omega \in \Omega \;;\;\; |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\} \\
B_n(\varepsilon) &= \{\omega \in \Omega \;;\;\; |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

と定義すると次は同値

(i) $X_n \stackrel{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$

概収束 (3/6)

証明

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{\forall}k \in \mathbb{N}\ {}^{\exists}m \text{ s.t. } {}^{\forall}n\ (n \geq m),\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \right\}$$

概収束 (4/6)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$^{\exists}\Omega_0 \subset \Omega \textit{ s.t. } \mathsf{P}(\Omega_0) = 1,\ \omega \in \Omega_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Omega_0 \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\varliminf_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k})\right\} \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\forall k\ 1 = \mathsf{P}(\Omega_0) \le \mathsf{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(1/k))$$

$$^{\forall}\varepsilon > 0\ ^{\exists}k \text{ s.t. } \varepsilon > 1/k$$
$$\Rightarrow \quad \mathsf{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) \ge \mathsf{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(1/k)) = 1$$

概収束 (5/6)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$A_{(k)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(1/k)$ とおくと $^\forall k$ $\mathsf{P}(A_{(k)}) = 1$

$A_{(k)} \supset A_{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ であるから

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)}\Big) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(A_{(k)}) = 1$$

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{ \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \Big\}$$ とおくと $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$,

$\omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

概収束 (6/6)

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に 同一分布 に従う確率変数列,

$\mathrm{E}(X_n) = \mu$ (有限値)

$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n \stackrel{a.s.}{\to} \mu \quad (n \to \infty)$$

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 6 章)

分布収束 (1/6)

定義 5.2 (分布収束 (convergence in distribution))

F_n : 確率変数 X_n の分布関数 $(n = 1, 2, \ldots)$,
F : 確率変数 X の分布関数

F の任意の連続点 x で

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または 法則収束) するという. P_X を X_n の極限分布といい,

$$X_n \xrightarrow{d} X \ (n \to \infty) \text{ または } X_n \xrightarrow{d} P_X \ (n \to \infty)$$

とかく.
(P_X には $N(0,1)$ などの分布を表す記号を書くこともある)

分布収束 (2/6)

退化した分布

実数 c に対して

$$\mathsf{P}(X = c) = 1$$

であるとき, X の分布を c **に退化した分布**といい, $U(c)$ と表す.

$U(c)$ の分布関数は

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

分布収束 (3/6)

例 5.3

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,
$X_i \sim U(0,1)$ (区間 (0,1) 上の一様分布)

$$U_n = \max_{i \le n} X_i$$

とする. U_n の分布関数は

$$\begin{aligned} F_n(u) &= \mathsf{P}(U_n \le u) = \mathsf{P}(X_1 \le u, \ldots, X_n \le u) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i \le u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ u^n, & 0 < u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = F(u) = \begin{cases} 0, & u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases}$$

分布収束 (4/6)

例 5.3 (つづき)

$F(u)$ は 1 に退化した分布 $U(1)$ の分布関数で

$$U_n \xrightarrow{d} U(1)$$

となる.

$$W_n = n(1 - U_n)$$

W_n の分布関数は

$$\begin{aligned} G_n(w) &= \mathsf{P}(W_n \le w) = \mathsf{P}(n(1 - U_n) \le w) = \mathsf{P}\left(U_n \ge 1 - w/n\right) \\ &= 1 - F_n\left(1 - w/n\right) = \begin{cases} 0, & w \le 0 \\ 1 - (1 - w/n)^n, & 0 \le w \le n \\ 1, & w \ge n \end{cases} \end{aligned}$$

分布収束 (5/6)

例 5.3 (つづき)

$$\lim_{n\to\infty} G_n(w) = G(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - e^{-w}, & w \geq 0 \end{cases}$$

$G(w)$ は平均 1 をもつ指数分布 $\mathit{Ex}(1)$ の分布関数であるので

$$W_n \xrightarrow{d} \mathit{Ex}(1)$$

となる.

分布収束 (6/6)

定理 5.4 (レヴィの連続定理)

X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の特性関数を φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t = 0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} \mathsf{P}_X$ $(n \to \infty)$.
[証明は省略 (テキスト参照)]

分布収束と特性関数の収束

$\varphi_n(t)$: 確率変数 X_n の特性関数 $(n = 1, 2, \ldots)$
$\varphi(t)$: 確率変数 X の特性関数

$$X_n \xrightarrow{d} X \ (n \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\forall} t \ \varphi_n(t) \to \varphi(t) \ (n \to \infty)$$

中心極限定理 (1/4)

定理 5.5 (中心極限定理)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列,

$$\mathrm{E}(X_j) = \mu,\ \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

[証明は板書で]

メモ用紙

メモ用紙

中心極限定理 (2/4)

注 5.1 (和の分布の近似)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列
中心極限定理を用いると和 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ の分布を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(a < S_n \leq b) &= \mathrm{P}\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

によって近似できる.

中心極限定理 (3/4)

注 5.2 (連続性の補正)

$\{X_n\}$：独立に同一分布に従う確率変数列．整数値のみをとる．

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

S_n も整数値しかとらないので, a, b を整数値とするとき,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(a \le S_n \le b) &= \mathsf{P}(a-1 < S_n \le b) \qquad (1) \\ &= \mathsf{P}(a-0.5 < S_n \le b+0.5) \qquad (2) \end{aligned}$$

中心極限定理 (4/4)

注 5.8 (連続性の補正 (つづき))

$\mathrm{E}(X_j) = \mu, \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$ とする.
(1), (2) それぞれの, 中心極限定理による確率の近似式は

$$\Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{3}$$

$$\Phi\left(\frac{b + 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{4}$$

例 5.5 (2 項分布の正規近似)

コインを 200 回投げて, 表が 95 回以上 105 回以下でる確率
$\mu = 1/2, \sigma^2 = 1/4, n = 200, a = 95, b = 105$
正確な値 : $0.56325\cdots$,
近似値 : (3) 0.56222(0.00103), (4) 0.56331(0.000006)

漸近公式 (1/4)

定理 5.8 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \ \Rightarrow \ X_n \xrightarrow{p} X$

定理 5.3 $X_n \xrightarrow{p} X \ \Rightarrow \ X_n \xrightarrow{d} X, \quad X_n \xrightarrow{d} U(c) \ \Leftrightarrow \ X_n \xrightarrow{p} c$

定理 5.1 (スラスキーの定理)

$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{p} c$ 定数とする．ただし, c は定数である．このとき

(1) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

(2) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$.

(3) $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c \quad (c \neq 0,\ \mathrm{P}(Y_n \neq 0) = 1)$.

漸近公式 (2/4)

定理 5.11

(1) $X_n \xrightarrow{p} a$ かつ $g(x)$ は $x = a$ で連続 $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$.

(2) $X_n \xrightarrow{p} a, Y_n \xrightarrow{p} b$ かつ $g(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で連続
$\Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(a, b)$.

(3) $X_n \xrightarrow{d} X$ かつ $g(x)$ は X の値域 $(= R(X))$ で連続
$\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

(4) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} b$ かつ $g(x, y)$ は $D = \{(x, b) \mid x \in R(X)\}$ で連続
$\Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, b)$.

(5) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ かつ $g(x)$ は $R(X)$ で連続 $\Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$.

漸近公式 (3/4)

定義 5.1 (多次元確率ベクトルと分布の収束)

$F(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{X}$ を k 次元確率ベクトルの分布関数.

(1) 任意の正数 ε に対して $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}\| > \varepsilon) = 0$ が成り立つとき, $\{\boldsymbol{X}_n\}$ は $\boldsymbol{X}$ に確率収束するといい, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} X$ とかく. ここで, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム,

(2) $F(\boldsymbol{x})$ のすべての連続点で $\lim_{n\to\infty} F_n(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ が成り立つとき, $\boldsymbol{X}_n$ は $\boldsymbol{X}$ に分布収束 (または, 法則収束) するといい, $\boldsymbol{X}$ の分布を P_X とするとき, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$, または, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \mathrm{P}_X$ とかく.

(3) $\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}) = 1$ が成り立つとき, $\{\boldsymbol{X}_n\}$ は $\boldsymbol{X}$ に概収束する, または確率 1 で収束するといい, $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{a.s.} \boldsymbol{X}$ とかく.

漸近公式 (4/4)

定理 5.12 (確率ベクトルの分布収束と特性関数の収束)

$\varphi(\boldsymbol{t})$: k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ 特性関数
$\varphi_n(\boldsymbol{t})$: k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}_n,\ n = 1, 2, \ldots$ の特性関数

次の $(1) \sim (3)$ は同値.

(1) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} X (n \to \infty)$.

(2) 任意の有界連続関数 $g(\boldsymbol{x})$ に対して
$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{g(\boldsymbol{X}_n)\} = \mathsf{E}\{g(\boldsymbol{X})\}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\boldsymbol{t}) = \varphi(\boldsymbol{t})$.

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 5 章)