

確率・統計 B
最尤推定量・信頼区間

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/wakaki/lecture/probstatB17/index.shtml>

2017.12.08

table of contents

最尤法

信頼区間

最尤法 (1/6)

定義 7.4

$f(\mathbf{x}) : \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ の確率密度関数
確率密度関数 $g(\mathbf{x})$ に対して

$$\text{KL}(f; g) = -\mathbb{E} \left\{ \log \frac{g(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X})} \right\}$$

を g の f からのカルバック-ライブラーの擬距離とよぶ.

補題 1

任意の g に対して, $\text{KL}(f; g) \geq 0$ が成り立ち, 等号は確率 1 で
 $f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X})$ のときに限る.
(証明は板書で)

メモ用紙

最尤法 (2/6)

$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} f(x; \theta_0), \theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

(仮定 A0) $\theta \neq \theta'$ ならば $P(f(X; \theta) \neq f(X; \theta')) > 0$.

大数の強法則から

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{f(X_i; \theta)}{f(X_i; \theta_0)} \xrightarrow{a.s.} -\text{KL}(f(*; \theta_0); f(*; \theta)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

である.

補題 7.1 より 右辺は $\theta = \theta_0$ で最大値をとる.

左辺を最大とする $\theta = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ は,
 $n \rightarrow \infty$ のとき θ_0 に収束 (A0 以外にも条件が必要)

最尤法 (3/6)

尤度関数

標本変量 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ に対する統計モデルを

$$P(\mathbf{X} \in A) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), & \mathbf{X} \text{ が離散型の場合} \\ \int_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x}, & \mathbf{X} \text{ が連続型の場合} \end{cases}$$

とする。ここに、 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. 確率密度関数 $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ を (\mathbf{x} を固定して) $\boldsymbol{\theta}$ の関数とみなすとき

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) \quad (= f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})) \quad (1)$$

と表し、尤度関数とよぶ。

最尤法 (4/6)

定義 7.5 (最尤推定量)

尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ の最大を実現する $\boldsymbol{\theta}$ を $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ と表し、 $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値という。

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}).$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量という。

対数尤度 $\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ を $\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ と表す。多くの場合、最尤推定値は尤度方程式

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

の解として与えられる。

最尤法 (5/6)

例 7.7

$$(1) X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, \theta), \theta \in (0, 1)$$

$$\text{尤度関数: } L(\theta; \mathbf{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{最尤推定値: } \hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

$$(2) X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2), \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$$

$$\text{尤度関数: } L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$\text{最尤推定値: } \hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$(3) X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$$

$$\text{尤度関数: } L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 < x_i \leq \theta, \quad \theta \in \Theta = (0, \infty)$$

$$\text{最尤推定値: } \hat{\theta} = \max_{i=1, \dots, n} x_i$$

最尤法 (6/6)

最尤推定量の性質

(i) 不偏性

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

(ii) 一致性

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iii) 漸近正規性

標準化すると $n \rightarrow \infty$ のとき正規分布に分布収束する性質

例 7.8

	不偏性	一致性	漸近正規性
例 7.7(1)	○	○	○
例 7.7(2) $\hat{\mu}$	○	○	○
例 7.7(2) $\hat{\sigma}^2$	×	○	○
例 7.7(3)	×	○	×

信頼区間 (1/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間)

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2),$$

μ : 未知, σ^2 : 既知

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n), \text{ したがって } \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

$$P\left(-2 < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2\right) = 0.954$$

確率の括弧内は

$$-2 < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2 \iff \bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

と表せる.

信頼区間 (2/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間 (続き))

区間

$$\left[\bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

が μ を含む確率が 0.954 であるので, “ μ の信頼係数 0.954 の信頼区間” とよぶ.

信頼区間 (3/7)

定義 7.6

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)' \sim P_\theta, \theta \in \Theta$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$T_1(\mathbf{X}), T_2(\mathbf{X}) \quad (T_1 \leq T_2) : \text{統計量}$$

$$P_\theta(T_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq T_2(\mathbf{X})) \geq 1 - \alpha \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

を満たすとき、区間 $[T_1, T_2]$ を水準 $1 - \alpha$ の信頼区間、
あるいは水準 $100 \times (1 - \alpha)\%$ の信頼区間という。

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta(T_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq T_2(\mathbf{X})) = 1 - \alpha$$

のとき、区間 $[T_1, T_2]$ を信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間、
あるいは $100 \times (1 - \alpha)\%$ 信頼区間という。

信頼区間 (4/7)

例 7.11 (例 7.10 で σ^2 も未知の場合)

$$\sigma^2 \Rightarrow S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

となる (定理 6.9)

Ψ_{n-1} : 自由度 $n-1$ の t -分布の分布関数

$t_{n-1}(\alpha)$: $1 - \Psi_{n-1}(t) = \alpha$ となる t の値

自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α 点 と呼ぶ.

$$\Rightarrow P(|T| \leq t_{n-1}(\alpha/2)) = 1 - \alpha$$

信頼区間 (5/7)

例 7.11 (続き)

$$\left[\bar{X}_n - t_{n-1}(\alpha/2) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1}(\alpha/2) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

は μ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間である.

信頼区間 (6/7)

例 (正規母集団でない場合)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (\text{定理 6.3(3)})$$

 $z_{\alpha/2}$: 標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点 ($1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$)

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 1 - \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

信頼区間 (7/7)

例 7.12 (2項分布)

 $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, p)$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_j \sim B(n, p)$$

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

 p の信頼係数 $1 - \alpha$ の近似的な信頼区間

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$