練習問題 1

2019.10.7

1. $X_n \sim B(n,p)$ $(n=1,2,\ldots)$ とする．$Y_n = \frac{1}{n}X_n$ とするとき，$Y_n \xrightarrow{p} p$ を示せ．ただし，$B(n,p)$ の確率関数は

$$f(x) = \begin{cases} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} & (x=0,1,\ldots,n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．

2. $\{X_n\}$ を確率変数列とする．$\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ であり，
X_n の特性関数は $\varphi_n(t) = \exp\{n^{-1}(e^{it}-1)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ であるとする．

   (1) X_n の平均と分散を n を用いて表わせ．

   (2) $n \to \infty$ のとき，X_n は 0 に確率収束することを示せ．

3. X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の (実数値) 確率変数とする．$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $n \to \infty$ のとき 0 に収束する実数列とし，$Y_n = a_n X$ $(n=1,2,\ldots)$ と定義すると，$n \to \infty$ のとき，Y_n は 0 に概収束することを示せ．

4. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ に対して

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega\ ;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}$$
$$B_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega\ ;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値であることを示せ．

   (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

   (iii) $\forall \varepsilon > 0\ \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$