練習問題 2

2019.10.9

1. $\{X_n\}$ を互いに独立に, 次の確率密度関数を持つ連続型分布に従う確率変数列とし, $V_n = \min_{i \le n} X_i$, $Z_n = \sqrt{n} V_n$ と定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{その他} \end{cases}$$

   (1) $V_n \xrightarrow{d} 0 \ (n \to \infty)$ を示せ.

   (2) $n \to \infty$ のときの, Z_n の極限分布の分布関数を求めよ.

2. $\{X_n\}$ を互いに独立な確率変数列とし, $k = 1, 2, 3, 4$ について $\alpha_k = \mathrm{E}(X_n^k)$ が存在すると仮定する. (n について共通であることに注意.)

   (1) $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_n)$ および, $\mathrm{Var}\{(X_n - \alpha_1)^2\}$ を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を用いて表せ.

   (2) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \alpha_1)^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X_1) \quad (n \to \infty)$ を証明せよ.

   (3) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{a.s.} \alpha_1 \quad (n \to \infty)$ を証明せよ.
   (難しい, この小問は小テストには出しません.)

3. $\{X_n\}$ を確率変数列とする. X_n の特性関数は $\psi_n(t) = \exp(itc - |t|/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるとする. ただし, c は定数である.

   (1) $\mathrm{E}[|X_n|]$ は存在するか? 理由をつけて答えよ.

   (2) 点 c に退化した分布 $\mathrm{U}(c)$ の特性関数を求めよ.

   (3) $n \to \infty$ のとき, X_n は c に確率収束することを示せ.

4. $\{X_n\}$ を互いに独立に, 区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数列とする.

   (1) $\mathrm{E}(X_n), \mathrm{Var}(X_n)$ の値を計算せよ.

   (2) 中心極限定理を用いると, n の値が大きいときには 標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて,

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) \approx \Phi(\text{ア})$$

   と近似できる. アに入るべき式を書け.