確率・統計 B　レポート課題

2019.11.27

以下の問題の解答を A4 の用紙に記載し，学生番号・氏名・提出日を記載した表紙をつけてホッチキス止めし，12 月 6 日 (金) までに，数学事務室のレポートボックスに提出すること。

問題 1　$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ とする. ただし, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $Y_1 = cX_2$ とし, $\mathrm{E}\{(X_1 - Y_1)^2\}$ が最小となるような c の値を求めよ.

(2) $\mathrm{E}\{(X_1 - Y_1)^2\}$ が最小であるとき, $X_1 - Y_1$ と Y_1 は独立であることを示せ.

問題 2　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立に, 次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型分布に従う確率変数とし, その順序統計量を $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ \text{その他} \end{cases}$$

(1) $X_{(2)}$ の確率密度関数を求めよ.

(2) $X_{(2)}$ の分布関数は

$$F_{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ 1 - nx(1-x)^{n-1} - (1-x)^n & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

と表されることを示せ.

(3) $X_{(2)} \xrightarrow{p} 0 \ (n \to \infty)$ であることを示せ.

(4) $n \to \infty$ のときの $Z = nX_{(2)}$ 極限分布の分布関数を求めよ.