

確率・統計 B

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/wakaki/lecture/index.shtml>

2019.10.7

確率収束
○○○○○○○

概収束
○○○○○

分布収束
○○○○○

中心極限定理
○○○○○○○○○○

漸近公式
○○○

確率収束

概収束

分布収束

中心極限定理

漸近公式

確率収束 (1/6)

ベルヌーイ試行

条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行を,
成功率 p , 反復回数 n のベルヌーイ試行 とよぶ.

- (1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.
- (2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.
- (3) 事象 A が起こる確率 ($= p$) は毎回不変である.

成功率 p , 反復回数 n のベルヌーイ試行において,
事象 A が起こった回数を X とすると

$$X \sim B(n, p) \quad (\text{定理 2.8})$$

確率収束 (2/6)

例 5.1

サイコロを何度も振るとき 1 の目の出る比率は $1/6$ に近づく.

一般のベルヌーイ試行において,

$$X_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こった} \\ 0 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こらなかった} \end{cases}$$

とし,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad (A \text{ が起こる相対頻度})$$

とする.

\bar{X}_n は $n \rightarrow \infty$ のとき, $p = P(A)$ に近づく.

確率収束 (3/6)

- \bar{X}_n が p に近づくことの, 定義は?
⇒ 確率収束, 概収束
- 近づくことの理論的な裏づけは?
⇒ 大数の法則
- 例えば, $n = 100, d = 0.1$ に対して, $P(|\bar{X}_n - p| \leq d)$ の値は
どれ位?
⇒ 分布収束, 中心極限定理

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

 $\{X_n\}$: 確率変数列, θ : 定数, X : 確率変数

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は θ に確率収束するといひ,

$$X_n \xrightarrow{P} \theta \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に確率収束するといひ,

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

 $\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,

$$E(X_n) = \mu, \text{Var}(X_n) = \sigma^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

 \Rightarrow

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

(証明は板書で)

例 5.1 の場合, $E(X_n) = p$, $\text{Var}(X_n) = p(1-p)$ だから

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} p \quad (n \rightarrow \infty)$$

確率収束 (6/6)

復習 (平均, 分散の性質, 不等式)

(1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$

(2) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$

(3) $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X).$

(4) X と Y が独立 $\Rightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

(5) (チェビシェフの不等式) $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ ならば

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

確率収束
○○○○○○●

概収束
○○○○○○○

分布収束
○○○○○○○

中心極限定理
○○○○○○●○○○

漸近公式
○○○○

メモ用紙

概収束 (1/6)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

 $\{X_n\}$: 確率変数列, X : 確率変数 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \Rightarrow P(\Omega_0) = 1$$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといいい,

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

概収束 (2/6)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega ; |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}$$

$$B_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega ; |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値

- (i) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \ P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = 1$
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \ P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n(\varepsilon)) = 0$

概収束 (3/6)

証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \text{ s.t. } \forall n (n \geq m), |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists m \text{ s.t. } \forall n (n \geq m), |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\}$$

$$\{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\}$$

概収束 (4/6)

(i) \Rightarrow (ii)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ s.t. } \varepsilon > 1/k$$

$$\Rightarrow A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega ; |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\} \supset A_n(\frac{1}{k})$$

$$\Rightarrow \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon) \supset \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\frac{1}{k}) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\frac{1}{k}) \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\frac{1}{k}) \right\}\right) = 1$$

概収束 (5/6)

(ii) \Rightarrow (i)

$$A_{(k)} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(1/k) \text{ とおくと } \forall k \text{ P}(A_{(k)}) = 1$$

$A_{(k)} \supset A_{(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) であるから

$$\text{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{P}(A_{(k)}) = 1$$

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)} \text{ より } \text{P}(\Omega_0) = 1,$$

$$\left(\Omega_0 = \{ \omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \} \right)$$

概収束 (6/6)

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列,

$E(X_n) = \mu$ (有限値)

\Rightarrow

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

(参考: 「確率論」 西尾真喜子, 第 6 章)

分布収束 (1/6)

定義 5.2 (分布収束 (convergence in distribution))

F_n : 確率変数 X_n の分布関数 ($n = 1, 2, \dots$),

F : 確率変数 X の分布関数

F の任意の連続点 x で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または 法則収束) するという. P_X を X_n の極限分布といい,

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad X_n \xrightarrow{d} P_X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

(P_X には $N(0, 1)$ などの分布を表す記号を書くこともある)

分布収束 (2/6)

退化した分布

実数 c に対して

$$P(X = c) = 1$$

であるとき, X の分布を c に退化した分布といい, $U(c)$ と表す.

$U(c)$ の分布関数は

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

定数 c を $U(c)$ に従う確率変数と同一視して $X_n \xrightarrow{d} c$ ($n \rightarrow \infty$) と書くこともある.

分布収束 (3/6)

例 5.3

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,
 $X_i \sim U(0, 1)$ (区間 $(0, 1)$ 上の一様分布)

$$U_n = \max_{i \leq n} X_i$$

とする. U_n の分布関数は

$$\begin{aligned} F_n(u) &= P(U_n \leq u) = P(X_1 \leq u, \dots, X_n \leq u) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ u^n, & 0 < u < 1 \\ 1, & u \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = F(u) = \begin{cases} 0, & u < 1 \\ 1, & u \geq 1 \end{cases}$$

分布収束 (4/6)

例 5.3 (つづき)

$F(u)$ は 1 に退化した分布 $U(1)$ の分布関数で

$$U_n \xrightarrow{d} U(1)$$

となる.

$$W_n = n(1 - U_n)$$

W_n の分布関数は

$$\begin{aligned} G_n(w) &= \mathbf{P}(W_n \leq w) = \mathbf{P}(n(1 - U_n) \leq w) = \mathbf{P}(U_n \geq 1 - w/n) \\ &= 1 - F_n(1 - w/n) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - (1 - w/n)^n, & 0 \leq w \leq n \\ 1, & w \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

分布収束 (5/6)

例 5.3 (つづき)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(w) = G(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - e^{-w}, & w \geq 0 \end{cases}$$

$G(w)$ は平均 1 をもつ指数分布 $Ex(1)$ の分布関数であるので

$$W_n \xrightarrow{d} Ex(1)$$

となる.

分布収束 (6/6)

定理 5.4 (レヴィの連続定理)

X_n ($n = 1, 2, \dots$) の特性関数を φ_n ($n = 1, 2, \dots$) とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t = 0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} P_X$ ($n \rightarrow \infty$).
[証明は省略 (テキスト参照)]

分布収束と特性関数の収束

$\varphi_n(t)$: 確率変数 X_n の特性関数 ($n = 1, 2, \dots$)

$\varphi(t)$: 確率変数 X の特性関数

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \quad \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

中心極限定理 (1/4)

定理 5.5 (中心極限定理)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列,

$$E(X_j) = \mu, \text{Var}(X_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

[証明は板書で]

確率収束
○●○○○○○

概収束
○●○○○○

分布収束
○●○○○○

中心極限定理
○●○○○○○○○○○

漸近公式
○●○○

メモ用紙

確率収束
○○●○○○

概収束
○○●○○○

分布収束
○○●○○○

中心極限定理
○○●○○○○○○○

漸近公式
○○●○

メモ用紙

中心極限定理 (2/4)

注 5.1 (和の分布の近似)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列

中心極限定理を用いると和 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ の分布を

$$\begin{aligned} P(a < S_n \leq b) &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \end{aligned}$$

によって近似できる.

中心極限定理 (3/4)

注 5.2 (連続性の補正)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列. 整数値のみをとる.

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$$

S_n も整数値しかとらないので, a, b を整数値とするとき,

$$P(a \leq S_n \leq b) = P(a - 1 < S_n \leq b) \quad (1)$$

$$= P(a - 0.5 < S_n \leq b + 0.5) \quad (2)$$

中心極限定理 (4/4)

注 5.8 (連続性の補正 (つづき))

$E(X_j) = \mu, \text{Var}(X_j) = \sigma^2$ とする.

(1), (2) それぞれの, 中心極限定理による確率の近似式は

$$\Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (3)$$

$$\Phi\left(\frac{b + 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (4)$$

例 5.5 (2項分布の正規近似)

コインを 200 回投げて, 表が 95 回以上 105 回以下でる確率

$\mu = 1/2, \sigma^2 = 1/4, n = 200, a = 95, b = 105$

正確な値 : 0.56325...

近似値 : (3) 0.56222(0.00103), (4) 0.56331(0.000006)

収束の関係 (1/5)

定理 5.3 $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X, \quad X_n \xrightarrow{d} U(c) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} c$

[証明]

$F : X$ の分布関数, $F_n : X_n$ の分布関数 $\varepsilon > 0$

$X_n > x$ かつ $|X_n - X| \leq \varepsilon \Rightarrow X > x - \varepsilon$

対偶をとると

$X \leq x - \varepsilon \Rightarrow X_n \leq x$ または $|X_n - X| > \varepsilon$

$P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$

$F(x - \varepsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$

$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$

収束の関係 (2/5)

$$X > x + \varepsilon \text{ かつ } |X_n - X| \leq \varepsilon \Rightarrow X_n > x$$

対偶をとると

$$X_n \leq x \Rightarrow X \leq x + \varepsilon \text{ または } |X_n - X| > \varepsilon$$

$$\mathbf{P}(X_n \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

収束の関係 (3/5)

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, x が F の連続点ならば

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

収束の関係 (4/5)

$P(X = c) = 1$ とし, 逆を示す. このとき

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

であり, $x \neq c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| \leq \varepsilon) &\geq P(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon) \\ &= F_n(c + \varepsilon) - F_n(c - \varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| \leq \varepsilon) \geq F(c + \varepsilon) - F(c - \varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

収束の関係 (5/5)

定理 5.8 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

[証明は板書で]

漸近公式 (1/4)

定理 5.12 (スラスキーの定理)

$X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} c$ 定数 とする. ただし, c は定数である. このとき

(1) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c.$

(2) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX.$

(3) $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c \quad (c \neq 0, P(Y_n \neq 0) = 1).$

漸近公式 (2/4)

定理 5.11

$$(1) X_n \xrightarrow{p} a \text{ かつ } g(x) \text{ は } x = a \text{ で連続} \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(a).$$

$$(2) X_n \xrightarrow{p} a, Y_n \xrightarrow{p} b \text{ かつ } g(x, y) \text{ は } (x, y) = (a, b) \text{ で連続} \\ \Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(a, b).$$

$$(3) X_n \xrightarrow{d} X \text{ かつ } g(x) \text{ は } X \text{ の値域 } (= R(X)) \text{ で連続} \\ \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X).$$

$$(4) X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} b \text{ かつ } g(x, y) \text{ は } D = \{(x, b) \mid x \in R(X)\} \text{ で} \\ \text{連続} \\ \Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, b).$$

$$(5) X_n \xrightarrow{a.s.} X \text{ かつ } g(x) \text{ は } R(X) \text{ で連続} \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X).$$

漸近公式 (3/4)

定義 5.1 (多次元確率ベクトルと分布の収束)

$F(x)$: X を k 次元確率ベクトルの分布関数.

- (1) 任意の正数 ε に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|X_n - X\| > \varepsilon) = 0$ が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に確率収束するといい, $X_n \xrightarrow{P} X$ とかく. ここで, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム,
- (2) $F(x)$ のすべての連続点で $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または, 法則収束) するといい, X の分布を P_X とするとき, $X_n \xrightarrow{d} X$, または, $X_n \xrightarrow{d} P_X$ とかく.
- (3) $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に概収束する, または確率 1 で収束するといい, $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ とかく.

漸近公式 (4/4)

定理 5.12 (確率ベクトルの分布収束と特性関数の収束)

 $\varphi(\mathbf{t})$: k 次元確率ベクトル \mathbf{X} 特性関数 $\varphi_n(\mathbf{t})$: k 次元確率ベクトル \mathbf{X}_n , $n = 1, 2, \dots$ の特性関数

次の (1) ~ (3) は同値.

(1) $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X} (n \rightarrow \infty)$.

(2) 任意の有界連続関数 $g(\mathbf{x})$ に対して
$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{g(\mathbf{X}_n)\} = E\{g(\mathbf{X})\}.$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t})$.

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第5章)