確率統計基礎講義A

2013年前期

1　序章

1.1　確率空間の定義と性質

定義 1.1 (確率空間)
$(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ が, 次の (i), (ii) を満たすとき確率空間と呼ぶ.

(i) $\mathcal{B}$ が, 集合 Ω の σ-集合体である, すなわち $\mathcal{B}$ は Ω の部分集合からなる集合族であって, 次の (B1) ~ (B3) を満たす.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$.

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

このとき, Ω を標本空間, $(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間と呼ぶ. また, $\mathcal{B}$ に含まれる Ω の部分集合を事象と呼ぶ.

(ii) P は, $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度である, すなわち P は $\mathcal{B}$ 上の実数値関数であって, 次の (P1 ~ P3) を満たす.

(P1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

(P2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

(P3) P は完全加法的である. すなわち $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ で, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ ならば

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

定理 1.1 (確率の基本性質)
P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $\{A_n\}$ を $\mathcal{B}$ に属する事象列とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) (劣加法性)

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列のとき

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(3) $\{A_n\}$ が単調減少列のとき

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(4) (連続性) $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ のとき

$$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

問題 1.1
定理 1.1 を証明せよ.

定理 1.2 (ボレルーカンテリの第一定理)
$\{A_n\}$ を事象列とする. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$ ならば, $\mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$, すなわち $\mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c) = 1$ である.

定理 1.3 (ボレルーカンテリの第二定理)
$\{A_n\}$ を独立な事象列とする. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$ ならば, $\mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1$, すなわち $\mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c) = 0$ である.

定義 1.2 (確率収束)
確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ と X が次を満たすとき, X_n は X に確率収束するといい, $X_n \xrightarrow{p} X$ $(n \to \infty)$ とかく.

$$^\forall\delta > 0, \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| > \delta) = 0.$$

例 1.1 (大数の弱法則)
$X_1, X_2 \ldots,$ を独立に同じ分布に従う $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列とし, $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ が有限であるとすると, $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$ $(n \to \infty)$.

問題 1.2
チェビシェフの不等式を用いて, 例 1.1 を証明せよ.

定義 1.3 (概収束)
確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ と X に対して, $\Omega_0 \subset \Omega$ で, 次を満たすものが存在するとき, X_n は X に概収束するといい, $\xrightarrow{a.s.} X$ とかく.

$$\mathrm{P}(\Omega_0) = 1, \quad ^\forall\omega \in \Omega_0, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

1.2 大数の法則

定理 1.4 (コロモゴロフの不等式)
$\{X_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の独立な確率変数列とする. $S_j = X_1 + \cdots + X_j$ とおく. $\mathrm{E}[X_j] = 0,\ j = 1, \ldots, n$ ならば

$$\mathrm{P}(\max_{i=1,\ldots,n} |S_i| \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(S_n^2)}{a^2}, \quad a > 0. \tag{1.1}$$

定理 1.5 (独立和の収束)
$\{X_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の独立な確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n] = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_n] < \infty$ ならば $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ は概収束する.

補題 1.1 (クロネッカーの補題)
$\{m_n\}$ は $n \to \infty$ のとき ∞ に発散する正数の単調増加列とする. 数列 $\{x_n\}$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k} \text{ が存在すれば } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

定理 1.6
$\{X_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の独立な確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n] = 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}[X_n^2]}{n^2} < \infty$ ならば $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ $(n \to \infty)$.

定理 1.7 (コロモゴロフの大数の法則)
$\{X_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の独立な確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n] = a, \mathrm{Var}[X_n] \leq v,\ n = 1, 2, \ldots$ ならば, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n \xrightarrow{a.s.} a$ $(n \to \infty)$.

問題 1.3
コロモゴロフの大数の法則を証明せよ.

定理 1.8 (ヒンチン)
$X_1, X_2, \ldots$ を同じ分布に従う $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列とする. $2 > p \geq 1$ に対し

$$n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \xrightarrow{a.s.} 0 \tag{1.2}$$

となる必要十分条件は

$$\mathrm{E}[|X_1|^p] < \infty \text{ かつ } m = \mathrm{E}[X_1] \tag{1.3}$$

である.

1.3 中心極限定理

定義 1.4 (特性関数)
確率変数 X に対して, $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}[e^{itX}]$$

を X の特性関数と呼ぶ.

定理 1.9
X の特性関数 $\varphi_X(t)$ について, 次が成り立つ.

(1) $\varphi_X(0) = 1$.

(2) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

(3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.

(4) $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd}\varphi_X(ct)$. ただし, c, d は定数.

(5) $\mathrm{E}(|X|^n) < \infty$ ならば, $\varphi_X(t)$ は C^n クラスで,

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\bigg|_{t=0} = i^n\mathrm{E}(X^n).$$

問題 1.4
定理 1.9 を証明せよ.

補題 1.2
(1) $^\forall y \geq 0$ に対して,

$$0 \leq (\operatorname{sgn}\alpha)\int_0^y \frac{\sin\alpha x}{x}dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx.$$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$.
ただし

$$\operatorname{sgn}\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

定理 1.10 (反転公式)
確率変数 X の分布関数, 特性関数をそれぞれ, F_X, φ_X とする. このとき, F_X の連続点 a, b $(a < b)$ において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt$$

が成り立つ.

定理 1.11 (一意性定理)
確率変数 X_1, X_2 の確率分布をそれぞれ μ_1, μ_2 とする. また, それらの特性関数をそれぞれ φ_1, φ_2 とする. このとき

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$$

が成り立つ.

問題 1.5
次の確率密度関数によって定まる連続型分布を, 位置母数 μ, 尺度母数 σ のコーシー分布と呼び, $Ca(\mu, \sigma)$ と書く.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi\{\sigma^2 + (x-\mu)^2\}}$$

(1) $Ca(0, 1)$ の特性関数を求めよ. (ヒント:留数定理)

(2) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Ca(\mu, 1)$ ならば $\bar{X}_n \sim Ca(\mu, 1)$ であることを示せ.

定義 1.5 (分布収束)
確率変数列 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ と X の分布関数を, それぞれ $F_n(x), F(x)$ とする. F の任意の連続点 x で $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ が成り立つとき, X_n は X (X の分布) に分布収束するといい, $X_n \xrightarrow{d} X$, あるいは, $X_n \xrightarrow{d} F$ とかく.

補題 1.3
$X_n \xrightarrow{d} X$ $(n \to \infty)$ ならば, 任意の有界かつ連続な関数 $g(x)$ に対して $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\{g(X_n)\} = \mathrm{E}\{g(X)\}$ が成り立つ.

定理 1.12 (レヴィの連続定理)
X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の特性関数を φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t = 0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{P}_X$ $(n \to \infty)$.

補題 1.4
定理 1.12 の条件の下で, 任意の正数 ε に対して

$$\mathrm{P}(|X_n| \leq A) > 1 - \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

が成り立つような A が存在する.

補題 1.5
任意の実数値 x に対して

$$\left|e^{ix}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(ix)^k}{k!}\right|\le\frac{|x|^n}{n!}$$

定理 1.13 (中心極限定理)
各 n に対し, $X_{n,1},X_{n,2}\ldots,X_{n,n}$ は独立で, $\mathrm{E}[X_{n,k}]=0,\sum_{k=1}^n\mathrm{Var}[X_{n,k}]=1$ とする.

$$^\forall\tau>0,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\mathrm{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{k,n}|>\tau}]=0 \tag{1.5}$$

であれば, $Z_n:=\sum_{k=1}^n X_{n,k}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

定理 1.14 (中心極限定理)
$X_1,\ldots,X_n$ は互いに独立に同一分布に従う確率変数で

$$\mathrm{E}(X_j)=\mu,\ \mathrm{Var}(X_j)=\sigma^2,\quad j=1,\ldots,n$$

とする. このとき

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^n(X_j-\mu)=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$$

の分布は標準正規分布に分布収束する. すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt=\Phi(x).$$

問題 1.6
定理 1.14 を証明せよ.

2　最尤推定量の分布

定義 2.1 (標本と母集団分布)
確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ が互いに独立で, 同一の確率分布 P に従うとき, $X_1,\ldots,X_n$ は, 分布 P からの, 大きさ n 無作為標本といい, P を母集団分布という.

定義 2.2 (統計モデル)
母集団分布が, ある確率分布の集まり

$$\mathcal{P}=\{\mathrm{P}_\theta;\,\theta\in\Theta\},\quad\Theta\subset\mathbb{R}^p\ (p\text{ はある自然数})$$

に属すると想定されるとき, $\mathcal{P}$ を母集団分布の統計モデルという. このとき, θ を母数, Θ を母数空間と呼ぶ.

例 2.1
小学校 6 年男児 n 人のの身長 $X_1,\ldots,X_n$ (cm) を測定するとする. このとき, $X_1,\ldots,X_n$ の母集団分布は正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ からの無作為標本と考えられる. このとき, 母数は, $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)$, 母数空間は $\Theta=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ となる. 平均 μ, 分散 σ^2 の値がわかれば, 例えば, 小学 6 年男児の内, 身長が 130cm 以下の人数の比率は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{130}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}dx$$

によって近似することができる.

定義 2.3 (カルバックーライブラーの擬距離)
X の確率密度関数を $f(x)$ とする. 確率密度関数 $g(x)$ に対して

$$\mathrm{KL}(f;g)=\mathrm{E}\Big[\frac{f(X)}{g(X)}\Big]$$

をカルバックーライブラーの擬距離と呼ぶ. ただし, $\mathrm{P}(f(X)>0,\ g(X)=0)>0$ のときは, $\mathrm{KL}(f;g)=\infty$ と定義する.

補題 2.1
任意の g に対して, $\mathrm{KL}(f;g)\ge 0$ が成り立ち, 等号は確率 1 で $f(\boldsymbol{X})=g(\boldsymbol{X})$ のときに限る.

$X_1,\ldots,X_n\overset{i.i.d.}{\sim}f(x;\theta_0)$, $\theta_0\in\Theta$ とし, 次の仮定 (A0) が成り立つとする.

(A0) $\theta\ne\theta'$ ならば $\mathrm{P}(f(X;\theta)\ne f(X;\theta'))>0$.

大数の法則から

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\log\frac{f(X_i;\theta)}{f(X_i;\theta_0)}\xrightarrow{a.s.}-\mathrm{KL}(f(*;\theta_0);f(*;\theta))\quad(n\to\infty)$$

である. 仮定 (A0) が成り立つとき, 右辺は $\theta = \theta_0$ のときのみ最大値をとることから, 左辺, すなわち $\prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$ を最大とする θ を $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})$ とすると, $\hat{\theta}_n$ は, $n \to \infty$ のとき θ_0 に収束することが期待される.

標本変量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots X_n)'$ に対する統計モデルを

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}; \theta), & \boldsymbol{X} \text{ が離散型の場合} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}; \theta) d\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{X} \text{ が連続型の場合} \end{cases}$$

とする. ここに, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. 確率密度関数 $f(\boldsymbol{x}; \theta)$ を ($\boldsymbol{x}$ を固定して) θ の関数とみなすとき

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) \quad (= f(\boldsymbol{x}; \theta) \ ) \tag{2.6}$$

と表し, **尤度関数**とよぶ.

定義 2.4

尤度関数 $L(\theta; \boldsymbol{x})$ の最大を実現する θ を $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ と表し, θ の**最尤推定値**という. すなわち

$$L(\hat{\theta}; \boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\theta; \boldsymbol{x}).$$

また, $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ を θ の**最尤推定量**という.

対数尤度 $\log L(\theta; \boldsymbol{x})$ を $\ell(\theta; \boldsymbol{x})$ と表す. 多くの場合, 最尤推定値は**尤度方程式**

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta; \boldsymbol{x}) = 0$$

の解として与えられる.

問題 2.1

(1) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$, すなわち $\mathrm{P}(X_i = 1) = 1 - \mathrm{P}(X_i) = \theta$, $i = 1, \ldots, n$ とする. θ の最尤推定量を求めよ.

(2) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ とする. μ, σ^2 の最尤推定量を求めよ.

(3) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$ (区間 $(0, \theta)$ 上の一様分布) とする. θ の最尤推定量を求めよ.

補題 2.2

$\{X_n\}$ を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列とするとき, $X_n \overset{a.s}{\to} X$ であるための必要十分条件は $A_n(\varepsilon) = \{\omega; \ |X_n - X| \leq \varepsilon\}$ とするとき,

$$^\forall \varepsilon > 0, \ \mathrm{P}(\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n(\varepsilon)) = 1$$

である.

定理 2.1 (最尤推定量の一致性)

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{P}_{\theta_0}$, P_θ は確率密度関数, あるいは確率関数 $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ を持ち, 次の (A1),(A2) を仮定する.

(A1) 任意の θ_* ($\theta_* \neq \theta_0$) に対して正数 $\delta = \delta(\theta_*)$ が存在して

$$\eta(\theta_*) := \mathrm{E}\left[\sup_{\theta \in U_{\theta_*, \delta}} \log \frac{f(X_1; \theta)}{f(X_1; \theta_0)}\right] < 0.$$

ただし, $U_{\theta_*, \delta} = \{\theta \in \Theta; \ \|\theta - \theta_*\| < \delta\}$.

(A2) Θ のコンパクト部分集合 K が存在して

$$\eta_K := \mathrm{E}\left[\sup_{\theta \in K^c} \log \frac{f(X_1; \theta)}{f(X_1; \theta_0)}\right] < 0.$$

このとき, 各 n に対して確率 1 で最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ が存在するならば $\hat{\theta}_n \overset{a.s.}{\to} \theta_0$ $(n \to \infty)$.

定理 2.2 (漸近正規性 ; クラーメルの十分条件)

$X_1, \ldots, X_n$ を確率密度関数 $f(x; \theta_0)$ を持つ連続型分布からのランダム標本とする. ただし, $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}$, Θ は開集合である. また, θ_0 の近傍 U , 関数 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $H(x)$ と定数 M が存在して次の条件が成り立つと仮定する.

(A1) $f(x; \theta)$ は θ に関して 3 回微分可能である.

(A2) $\theta \in U$ で, $\left|\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}\right| < F_1(x)$, $\left|\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right| < F_2(x)$, かつ, $\left|\frac{\partial^3 \log f(x;\theta)}{\partial \theta^3}\right| < H(x)$ である. また, $F_1(x)$, $F_2(x)$ は可積分で, H, M は

$$\mathrm{E}_{\theta_0}\{H(X)\} \leq M$$

を満たす.

(A3) フィッシャー情報量 $J(\theta_0)$ は有限かつ正である.

このとき, 任意の正数 ε, δ に対して N が存在して, $n \geq N$ ならば $1-\varepsilon$ より大きい確率で, 尤度方程式 $\partial l(\theta, \boldsymbol{X})/\partial\theta = 0$ は, $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ 内に解を持つ. この解を $\hat{\theta}_n$ とすると

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, J(\theta_0)^{-1}) \tag{2.7}$$

が成り立つ.

例 2.2
$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Ca(\theta_0, 1)$ とする. 以下, $\theta_0 = 0$ とする.

$$\log\frac{f(x;\theta)}{f(x;0)} = \log\frac{1+x^2}{1+(x-\theta)^2}$$

$0 < \delta_0 < \theta_*$ とする. $|\theta - \theta_*| < \delta$ のとき

$$0 \leq (x-\theta)^2 \leq \max\{(\theta_* + \delta - x)^2, (x - \theta_* + \delta)^2\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\sup_{\theta\in U_{\theta_*,\delta_0}}\left|\log\frac{1+x^2}{1+(x-\theta)^2}\right| \\
&\leq \log(1+x^2) + \log(1+(x-\theta_*+\delta)^2) \\
&\quad + \log(1+(x-\theta_*-\delta)^2), \\
&\mathrm{E}_{\theta_0}[\log\{1+(X_1-\alpha)^2\}] < \infty
\end{aligned}$$

であるからルベーグの収束定理より

$$\lim_{\delta\to 0} E_{\theta_0}\Big[\sup_{\theta\in U_{\theta_*,\delta}}\log\frac{f(X;\theta)}{f(X;\theta_0)}\Big] = E_{\theta_0}\Big[\log\frac{f(X;\theta_*)}{f(X;\theta_0)}\Big]$$

また, 補題 2.1 より, $\theta_* \neq \theta_0$ ならば $E_{\theta_0}[\log\frac{f(x;\theta_*)}{f(x;\theta_0)}] < 0$. したがって, 定理 2.1 の (A1) を満たす.

$$\begin{aligned}
\sup_{|\theta|>k}\log\frac{f(x;\theta)}{f(x;\theta_0)} &= \sup_{|\theta|>k}\log\frac{1+x^2}{1+(x-\theta)^2} \\
&= \begin{cases} \log(1+x^2), & |x|>k \\ \log\frac{1+x^2}{1+(x-k)^2}, & 0 \leq x \leq k \\ \log\frac{1+x^2}{1+(x+k)^2}, & 0 > x \geq -k \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\sup_{|\theta|>k}\log\frac{f(X_1;\theta)}{f(X_1;\theta_0)}] \\
&= \mathrm{E}[\log(1+X_1^2)] - \mathrm{E}[1_{0\leq X_1\leq k}\log\{1+(k-X_1)^2\}] \\
&\quad - \mathrm{E}[1_{0>X_1\leq -k}\log\{1+(k+X_1)^2\}] \\
&= \mathrm{E}[\log(1+X_1^2)] \\
&\quad - 2\mathrm{E}[1_{0\leq X_1\leq k}\log\{1+(k-X_1)^2\}]
\end{aligned}$$

$k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[1_{0\leq X_1\leq k}\log\{1+(k-X_1)^2\}] \\
&\geq \mathrm{E}[1_{0\leq X_1\leq 1}\log\{1+(k-X_1)^2\}] \\
&\geq \mathrm{E}[1_{0\leq X_1\leq 1}\log\{1+(k-1)^2\}] \\
&= \log\{1+(k-1)^2\}\mathrm{P}(0\leq X_1\leq 1) \\
&\to \infty \quad (k\to\infty)
\end{aligned}$$

であるから 定理 2.1 の (A2) が成り立つ.
対数尤度関数は

$$l(\theta, \boldsymbol{X}) = -\sum_{i=1}^{n}\log\{1+(X_i-\theta)^2\} - n\log\pi$$

であり, $\lim_{\theta\to\pm\infty} l(\theta, \boldsymbol{X}) = -\infty$, $l(\theta, \boldsymbol{X}) \leq -n\log\pi$ であるから, 確率 1 で最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ は存在し, 定理 2.1 より $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta_0$ である.

例 2.3
$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Ca(\theta_0, 1)$, $\theta_0 = 0$ とする.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta} &= \frac{2(x-\theta)}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}^2}, \\
\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2} &= -\frac{8}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}^3} + \frac{6}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}^2}, \\
\frac{\partial\log f(x;\theta)}{\partial\theta} &= \frac{2(x-\theta)}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}} \\
\frac{\partial^3\log f(x;\theta)}{\partial\theta^3} &= -\frac{16(x-\theta)}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}^3} + \frac{4(x-\theta)}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sup_{|\theta|<\delta}\left|\frac{x-\theta}{\{1+(x-\theta)^2\}^k}\right| &\le \sup_{|\theta|<\delta}\frac{1}{\{1+(x-\theta)^2\}^{k-1/2}} \\
&= H_k(x;\delta) := \begin{cases} 1, & |x|<\delta \\ \dfrac{1}{\{1+(x-\delta)^2\}^{k-1/2}}, & x>\delta \\ \dfrac{1}{\{1+(x+\delta)^2\}^{k-1/2}}, & x<-\delta \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x;\delta)dx = 2\delta + 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{\{1+x^2\}^{k-1/2}}
$$

より $k>1$ ならば $\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x;\delta)dx < \infty$. $\frac{\partial^3 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^3}$ は有界であるから, 定理 2.2 の (A1), (A2) が成り立つ. また, $J(\theta_0)=\frac{1}{2}$ となるので (A3) も成り立つ.

尤度方程式の解は一意ではないが, 例 2.2 で, 最尤推定量の概収束を示しており, 最尤推定量も尤度方程式の解となっているので, 定理 2.2 で存在が保証されている解が最尤推定量であり, したがって最尤推定量の漸近正規性が示される.

3　検定計量の分布

3.1　仮説検定の基礎

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)', \quad X_1,X_2,\ldots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{P}_\theta \\
&\mathrm{P}_\theta \in \mathcal{P}=\{\mathrm{P}_\theta;\ \theta\in\Theta\}, \Theta\subset\mathbb{R}^p
\end{aligned}
$$

とする. $\boldsymbol{X}$ の実現値 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)'$ から, 仮説

$$
H_0 : \theta\in\Theta_0\ (\Theta_0\subset\Theta)
$$

が正しいかどうか判定する問題を仮説検定問題と呼ぶ. H_0 を**帰無仮説**, また,

$$
H_1 : \theta\in\Theta\backslash\Theta_0
$$

を**対立仮説**と呼ぶ.

仮説検定法は, $\boldsymbol{X}$ の値域 ($\mathbb{R}^n$) の部分集合 $\mathcal{W}$ を指定することによって与えられる. 実際, $\mathcal{W}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\in\mathcal{W} &\Rightarrow\ H_0 \text{ を棄却する} \\
\boldsymbol{x}\notin\mathcal{W} &\Rightarrow\ H_0 \text{ を棄却しない}
\end{aligned}
$$

とすれば良い. このとき, $\mathcal{W}$ を, これによって与えられる検定の**棄却域**と呼ぶ.

H_0 が正しいのに H_0 を棄却する誤りを, **第 1 種の過誤**, H_1 が正しいのに H_0 を棄却しない誤りを, **第 2 種の過誤**と呼ぶ.

$$
\beta(\theta;\mathcal{W})=\mathrm{P}_\theta(\boldsymbol{X}\in\mathcal{W})
$$

とすると, 第 1 種, 第 2 種の過誤の起こる確率は, それぞれ

$$
\begin{aligned}
&\beta(\theta;\mathcal{W}) \quad (\theta\in\Theta_0), \\
&1-\beta(\theta;\mathcal{W}) \quad (\theta\notin\Theta_0)
\end{aligned}
$$

と表される. $\beta(\theta;\mathcal{W})$ $(\theta\notin\Theta_0)$ を**検出力**と呼ぶ. 実用上は第 1 種の過誤は, それによって被る被害が大きい場合が多いので, 通常は, 第 1 種の過誤確率の上限として 0.05 や 0.01 など小さな値を設定する. $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta;\mathcal{W})\le\alpha$ となるような検定を**有意水準** α の検定と呼ぶ.

最適化問題　$0<\alpha<1$ とし,

$$
\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta;\mathcal{W})\le\alpha
$$

の条件下で, $\theta\in\Theta\backslash\Theta_0$ に対して, 検出力 $\beta(\theta;\mathcal{W})$ を最大とする $\mathcal{W}$ を求める. そのような検定を**最強力検定**と呼ぶ. 最強力検定は一般に $\theta\notin\Theta_0$ に依存するが, 任意の $\theta\notin\Theta_0$ に対して検出力を最大にする検定があれば, それを**一様最強力検定**と呼ぶ.

単純仮説の検定　$\Theta_0=\{\theta_0\}$ のとき, H_0 を単純仮説と呼ぶ.

$\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}$ $(\theta_0\ne\theta_1)$, $\Theta_0=\{\theta_0\}$ とする. このとき, 帰無仮説, 対立仮説はともに単純仮説で,

$$
H_0:\theta=\theta_0, \quad H_1:\theta=\theta_1 \tag{3.8}
$$

となる.

定理 3.1 (ネイマン－ピアソンの基本定理)
$\boldsymbol{X}$ の確率密度関数を $f(\boldsymbol{x};\theta)$ とし, (3.8) に対する有意水準 α の検定問題を考える.

$$\mathcal{W}_c = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x};\theta_1) \geq c\, f(\boldsymbol{x};\theta_0)\}$$

とし,

$$\mathrm{P}_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_c) = \alpha$$

を満たす c が存在すると仮定する. このとき, $\mathcal{W}_c$ を棄却域とする検定は最強力検定である.

対立仮説が複合仮説であるとき, 各 $\theta \in \Theta \backslash \Theta_0$ に対して, 定理 3.1 により, 最強力検定が決定されるが, 一般に, 最強力検定は θ ごとに異なる. 最強力検定が θ に依存しないとき, その検定は, 一様最強力検定となる.

例 3.1 (正規母集団の母平均に関する検定)
$X_1,\ldots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu,1)$ とし

$$H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu > 0$$

の検定を考える.

3.2 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ の検定

$X_1,\ldots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ は確率密度関数 $f(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ を持つとし

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$$

の検定問題を考える.

本節では, 第 2 節で与えた定理のように, 最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ が存在して, 尤度方程式

$$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \partial f(X_i;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0} \tag{3.9}$$

の解であるとする. このとき, 尤度比基準は

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i;\boldsymbol{\theta}_0)}{\prod_{i=1}^n f(X_i;\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}$$

となり, 適当な正則条件の下で

$$-2\log\lambda \xrightarrow{d} \chi_p^2 \quad n \to \infty$$

ワルド検定統計量は

$$T_W = n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)' J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)$$

と定義される. 適当な正則条件の下で

$$T_W \xrightarrow{d} \chi_p^2 \quad n \to \infty$$

スコア検定統計量は

$$T_S = \frac{1}{n}\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)' J(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}_0)$$

と定義される. 適当な正則条件の下で

$$T_S \xrightarrow{d} \chi_p^2 \quad n \to \infty$$

3.3 関数構造の検定

$X_1,\ldots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ は確率密度関数 $f(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ を持つとする. $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}); \boldsymbol{\xi} \in \Xi \subset \mathbb{R}^q\}$, $q < p$ とするとき

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$$

の検定問題を考える. ここで, $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ は Ξ 上で定義された Θ 内に値をとる C^3–級のベクトル値関数とし, $\boldsymbol{\xi}$ は未知であるとする.

帰無仮説が正しく, 真のパラメータが $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}_0)$ であると仮定する. また, Θ 全体での最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$, 帰無仮説の下での $\boldsymbol{\xi}$ の最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\xi}}_n$ とする. このとき, 尤度比基準は

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i;\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))}{\prod_{i=1}^n f(X_i;\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}$$

となる.

ワルド検定統計量, スコア検定統計量はそれぞれ,

$$T_W = n\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n)\}J(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n)\},$$
$$T_S = \frac{1}{n}\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))'J(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))^{-1}\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_n))$$

と定義される. このとき, 適当な正則条件の下で

$$-2\log\lambda \sim T_W \sim T_S \xrightarrow{d} \chi^2_{p-q}$$

3.4 関数制約仮説の検定

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ は確率密度関数 $f(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ を持つとし

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{0}, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}) \neq \boldsymbol{0}$$

の検定問題を考える. ここで, $\boldsymbol{h}$ は q 次元ベクトル値関数とする.

帰無仮説の下での $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量は多くの場合, ラグランジュの未定乗数法により, $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}$ に関する次の連立方程式の解として求められる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

ただし

$$\boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \partial f(X_i;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad H(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

である.

補題 3.1
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ を $\mathbb{R}^p$ 上で定義された p 次元ベクトル値連続関数で, $\|\boldsymbol{z}\| = \delta$ ならば常に $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) < 0$ を満たすものとする. このとき, $\|\boldsymbol{z}_0\| < \delta$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{z}_0$ が少なくともひとつ存在する.

定理 3.2
$\boldsymbol{\theta}_0$ を真値とし, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{0}$ とする.

$\boldsymbol{\theta}_0$ の近傍 U_0, 関数 $F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}), K(\boldsymbol{x})$ と定数 κ_1, κ_2 が存在して以下の (F1), (F2), (F3), (H1), (H2), (H3) が成り立つと仮定する.

(F1) $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ について 3 回微分可能.

(F2) $\boldsymbol{\theta} \in U_0$ で $\left|\frac{\partial f(x;\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right| \leq F_1(x), \left|\frac{\partial^2 f(x;\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| \leq F_2(x), \left|\frac{\partial^3 \log f(x;\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_j}\right| \leq K(x)$ かつ, $F_1(x), F_2(x)$ は可積分,

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in U_0} \mathrm{E}\{K(X_1)\} \leq 2\kappa_1.$$

(F3) $J(\boldsymbol{\theta_0}) = \mathrm{Var}\left\{\frac{\partial \log f(X_1;\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right\}$ は有限かつ正定値.

(H1) $h(\boldsymbol{\theta})$ は 2 回微分可能.

(H2) $\boldsymbol{\theta} \in U_0$ で $\left|\frac{\partial^2 h(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| \leq 2\kappa_2$.

(H3) $\mathrm{rank} H(\boldsymbol{\theta}_0) = q$.

このとき, 任意の正数 ε, δ に対して N が存在し $n \geq N$ ならば $1-\varepsilon$ より大きい確率で (3.10) は $\boldsymbol{\theta}_0$ の δ– 近傍内に解を持つ.

$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = J$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = H$ と略記するとワルド検定統計量は

$$T_W \sim n^{-1}\boldsymbol{s}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)'J^{-1}H(H'J^{-1}H)^{-1}H'J^{-1}\boldsymbol{s}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$$

と定義され, 帰無仮説の下で

$$T_W \xrightarrow{d} \chi^2_q$$

ラグランジュ未定乗数法検定統計量 T_{LM} は

$$T_{LM} \sim n^{-1}\hat{\boldsymbol{\lambda}}'H'J^{-1}H\hat{\boldsymbol{\lambda}}$$

と定義され,

$$T_{LM} \xrightarrow{d} \chi^2_q$$

ラグランジュの未定乗数と区別して, 尤度比基準を Λ と表すと

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(X_i;\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{\prod_{i=1}^n f(X_i;\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}$$

となり,

$$-2\log\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2_q$$

4　中心極限定理の精密化

4.1　エッジワース展開

$X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従う確率変数で

$$\mathrm{E}(X_j) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \ldots, n,$$

さらに, $\mathrm{E}(X_j^4) < \infty$ と仮定し,

$$\kappa^{(3)} = \frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{i^3}\left(\frac{d}{dt^3}\right)\log \mathrm{E}[e^{itX_j}]|_{t=0} \quad ：歪度$$
$$\kappa^{(4)} = \frac{1}{\sigma^4}\frac{1}{4^3}\left(\frac{d}{dt^3}\right)\log \mathrm{E}[e^{itX_j}]|_{t=0} \quad ：尖度$$

とする．さらに, クラメール条件

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\mathrm{E}(e^{itX_j})| < 1$$

が成り立つとき,

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j - \mu}{\sigma}$$

の確率密度関数を $f_n(z)$ とすると $n \to \infty$ のとき

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\left[1 + \frac{\kappa^{(3)}}{3!\sqrt{n}}H_3(z) + \frac{1}{n}\left\{\frac{\kappa^{(4)}}{24}H_4(z) + \frac{(\kappa^{(3)})^2}{72}H_6(z)\right\}\right] + o(n^{-1})$$

ただし, H_k は k 次のエルミート多項式と呼ばれ, 次で定義される．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2/2} = (-1)^k e^{-x^2/2}H_k(x)$$

4.2　サドルポイント近似

$X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従う連続型確率変数で, F, f, M, K をそれぞれ, 分布関数, 確率密度関数, 積率母関数, キュムラント母関数とする．

$$M(t) = e^{K(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$M(\tau) < \infty$ とし,

$$\sigma_\tau^2 = K^{(2)}(\tau), \quad z_\tau = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - K'(\tau)}{\sigma_\tau}, \quad a_k = \frac{K^{(k+2)}(\tau)}{(k+2)!} \tag{4.11}$$

とおく．$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_n(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_\tau}e^{nK(\tau)-n\tau\bar{x}}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z_\tau^2/2}\Bigg\{1 + \frac{\theta_3(\tau)}{\sqrt{n}}H_3(z_\tau) \\ + \frac{1}{n}\left(\theta_4(\tau)H_4(z_\tau) + \frac{\{\theta_3(\tau)\}^2}{2}H_6(z_\tau)\right)\Bigg\} + O(n^{-3/2})\Bigg], \end{aligned} \tag{4.12}$$

ただし,

$$\theta_k(\tau) = \frac{K^{(k)}(\tau)}{k!\sigma_\tau^k} \quad (k = 3, 4, \ldots). \tag{4.13}$$

$K'(\tau_0) = \bar{x}$ となる τ_0 はサドルポイントと呼ばれる．τ_0 が存在するとき, (4.12) において $\tau = \tau_0$ ととると, $z_\tau = 0$, $H_3(0) = 0, H_4(0) = 3, H_6(0) = -15$ であるから

$$f_n(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tau_0}}e^{n(K(\tau_0)-\tau_0\bar{x})}\left[1 + \frac{1}{n}\left\{3\theta_4(\tau_0) - \frac{15\{\theta_3(\tau_0)\}^2}{2}\right\} + O(n^{-2})\right] \tag{4.14}$$

が得られ, $1/n$ のべきによる展開式が得られる．

$\tau = 0$ ととると

$$\begin{aligned} f_n(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\Bigg[\exp\left\{-\frac{n\{K'(0) - \bar{x}\}^2}{2\sigma_0^2}\right\} \\ \cdot\Bigg\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{K^{(3)}(0)}{6\sigma_0^3}H_3\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - K'(0))}{\sigma_0}\right] + \frac{1}{n}\Bigg(\frac{K^{(4)}(0)}{24\sigma_0^4}H_4\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - K'(0))}{\sigma_0}\right] \\ + \frac{(K^{(3)}(0))^2}{72\sigma_0^6}H_6\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - K'(0))}{\sigma_0}\right]\Bigg)\Bigg\} + O(n^{-3/2})\Bigg] \end{aligned}$$

となるが, これは $\bar{X}$ の確率密度関数のエッジワース展開に一致する．

レポート

課題：問題 1.1〜問題 1.6, および, 問題 2.1
提出締め切り：８月９日 (金)
提出場所：数学事務室カウンター前のボックス