確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.5.24

目 次

行列2次形式統計量の分布

標本分散共分散行列

定義（標本分散共分散行列）
$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ を　$\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_i] = \boldsymbol{\mu}$, $\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}_i] = \Sigma$ を持つ分布に従う独立な確率ベクトルとし, 標本平均 $\bar{\boldsymbol{X}} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ とする．このとき, 標本の散らばりを表す尺度である標本分散共分散行列は

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}})'$$

で定義される.

注意 3.5.1) S は Σ の不偏推定量である．つまり $\mathrm{E}[S] = \Sigma$

Memo

行列2次形式統計量に関する定理1

定理 3.5.1 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ とすると,
$V = (n-1)S \sim W_p(n-1, S)$

正規確率行列の特性関数と補題

特性関数 $X = (X_{ij})$ を $p \times n$ 行列で，その成分 $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{pn}$ は独立に標準正規分布に従うとする．このとき，X の特性関数は

$$\mathcal{C}_X(T) := \mathsf{E}[\exp\{i\,\mathsf{tr}(T'X)\}] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathsf{tr}(T'T)\right\}$$

となる．ただし，$T = (t_{ij})$ は $p \times n$ 行列である．

補題 $X = (X_{ij})$ を $p \times n$ 行列で，その成分 $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{pn}$ は独立に標準正規分布に従うとする．H を $n \times q$ 定数行列で，$H'H = I_q$ とする．このとき $Y = XH$ の pq 個の成分は互いに独立に標準正規分布に従う．

Memo

行列2次形式統計量に関する定理2

定理 3.5.2 $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\mathbf{Z} = (\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n)'$ とおく. A を n 次対称なべき等行列とすると, $\mathbf{Z}'A\mathbf{Z} \sim W_p(f, \Sigma)$ である. ただし, $f = \mathrm{tr}(A)$ である.

行列 2 次形式統計量に関する定理 3

定理 3.5.3 $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\mathbf{Z} = (\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n)'$ とおく. A, B を n 次対称なべき等行列で,
$\mathrm{tr}(A) = a, \mathrm{tr}(B) = b, AB = O$ とする. このとき, $\mathbf{Z}'A\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Z}'B\mathbf{Z}$ は独立である.

行列 2 次形式統計量に関する定理 4

定理 3.5.4 $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\mathbf{Z} = (\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n)'$ とおく. A を n 次対称なべき等行列, $\boldsymbol{b}$ を $A\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_n$ を満たす n 次元ベクトルとする. このとき, $\mathbf{Z}'A\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Z}'\boldsymbol{b}$ は独立である.

行列2次形式統計量に関する定理5

定理 3.5.5 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ のとき, S と $\bar{\boldsymbol{X}}$ は独立である.

行列2次形式統計量に関する定理6

定理 3.5.6 $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\mathbf{0}, I_p)$, $\mathbf{Z} = (\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n)'$ とおく.

$$V = Z'Z = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

$$V_{11.2} = V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}$$

とする. ただし, V_{11} は $q \times q$ である. このとき $V_{11.2}$ と V_{22} は独立で, $V_{11.2} \sim W_q(n-p+q, I_q)$, $V_{22} \sim W_{p-q}(n, I_{p-q})$ である.

Memo

逆ウィシャート分布の期待値 (再掲)

$V \sim W_p(n, \Sigma)$ とする. $n - p - 1 > 0$ ならば
$\mathsf{E}[V^{-1}] = \Sigma^{-1}/(n - p - 1)$

レポート問題 5

ウィシャート分布の再生性を示せ.

再生性：V_1, V_2 は独立で，$V_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$，$V_2 \sim W_p(n_2, \Sigma)$ ならば $V_1 + V_2 \sim W_p(n_1 + n_2, \Sigma)$