確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.4.19

目 次

2. 多次元確率分布と多次元正規分布

2.1 多次元確率分布

分布関数

p 次元確率変数ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ の同時確率密度関数を $f(x_1, \ldots, x_n)$ とする．このとき，$\boldsymbol{X}$ の分布関数は

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_p \leq x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f(u_1, \ldots, u_p) du_1 \cdots du_p$$

と定義される．

期待値と分散

定義

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)' \sim f(x_1, \ldots, x_p)$（確率密度関数）とする.

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \cdots dx_p$$

を $\boldsymbol{X}$ の期待値（期待値ベクトル）と呼ぶ. ただし,
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)'$.
$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)' = \mathrm{E}[\boldsymbol{X}]$ とするとき

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \cdots dx_p$$

を $\boldsymbol{X}$ の分散共分散行列という.
($\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}] = \Sigma$ と書くことが多い.)

期待値と分散（続き）

分散共分散行列 $\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}]$ の第 (i, j) 成分は，X_i と X_j の共分散（$i = j$ のときは分散）となってる．X_i と X_j の相関係数

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_i]\mathrm{Var}[X_j]}}$$

を成分にもつ $p \times p$ 行列 Φ を 相関行列と呼ぶ．
$\Sigma = \mathrm{Var}[\boldsymbol{X}]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}[X_i]$ $(i = 1, \ldots, p)$ とすると

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)\Phi\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$$

と表される．

特性関数

定義

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)' \sim f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_p)$ （確率密度関数）に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\boldsymbol{t}) &= \mathsf{E}[\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^p)\end{aligned}$$

を $\boldsymbol{X}$ の特性関数と呼ぶ. ($d\boldsymbol{x} = dx_1 \cdots dx_p$)

$\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^p$ に対して $Y = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{X}$ の特性関数を $\mathcal{C}_Y(t)$ とおくと，

$$\mathcal{C}_Y(t) = \mathsf{E}[\exp(itY)] = \mathsf{E}[\exp(it\boldsymbol{l}'\boldsymbol{X})]$$

となることが分かる. $t\boldsymbol{l} = \boldsymbol{t}$ と置き換えると，$\boldsymbol{X}$ の特性関数となることから，各 $\boldsymbol{l}$ に対する Y の分布を決めれば，$\boldsymbol{X}$ の分布が決まることになる.

特性関数の性質

- 一意性定理：確率変数ベクトル $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ の特性関数を $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{t}), \mathcal{C}_2(\boldsymbol{t})$ とすると

$$\mathcal{C}_1(\boldsymbol{t}) = \mathcal{C}_2(\boldsymbol{t}) \iff \boldsymbol{X}_1 \sim \boldsymbol{X}_2$$

- モーメント公式：$r = r_1 + \cdots + r_p$ とおく．($r_1, \ldots, r_p$ は非負の整数) このとき，

$$\mathsf{E}[\|\boldsymbol{X}\|^r] < \infty \;\Rightarrow\; i^r \mathsf{E}[X_1^{r_1} \cdots X_p^{r_p}] = \frac{\partial^r}{\partial t_1^{r_1} \cdots \partial t_p^{r_p}} \mathcal{C}(\boldsymbol{t}) \Big|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}}$$

$\mathsf{E}[\|\boldsymbol{X}\|^r] < \infty$ の条件は，微分と積分の順序交換を保証する条件である．

正定値，半正定値行列

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)'$ とする．
定義 $p \times p$ 行列 $M = (m_{ij})$ が次を満たすとき，正定値であるといい，$M > 0$ と書く：

$$\begin{cases} M = M' \\ {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \backslash \{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{x}' M \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j m_{ij} > 0 \end{cases}$$

定義 $p \times p$ 行列 $M = (m_{ij})$ が次を満たすとき，半正定値であるといい，$M \geq 0$ と書く：

$$\begin{cases} M = M' \\ {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}' M \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j m_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

正定値，半正定値行列（続き）

確率変数ベクトル $\boldsymbol{X}$ の分散共分散行列 $\Sigma = \mathsf{Var}[\boldsymbol{X}]$ は半正定値である.

$$\Sigma' = \{\mathsf{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})']\}' = \mathsf{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \Sigma$$
$$\boldsymbol{x}'\Sigma\boldsymbol{x} = \mathsf{E}[\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{x}] = \mathsf{E}[\{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})\}^2] \geq 0$$

同様に，相関行列も正定値である.
また，連続型確率ベクトルの分散共分散行列および相関行列はは正定値である.

正定値，半正定値行列（続き）

対称行列 M の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ とする.

(1) M が正定値であるための必要十分条件は $\lambda_j > 0 \ (j = 1, \ldots, p)$ である.

(2) M が半正定値であるための必要十分条件は $\lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, p)$ である.

Memo

行列と逆行列の分割

定理 2.1.1. p 次正定値行列 M を

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

と分割すると，

$$|M| = |M_{22}| \cdot |M_{11.2}|$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & M_{22}^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{p_1} \\ -M_{22}^{-1} M_{12}' \end{pmatrix} M_{11.2}^{-1} \begin{pmatrix} I_{p_1} \\ -M_{22}^{-1} M_{12}' \end{pmatrix}'$$

ただし，$M_{11.2} = M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21}$

Memo

Memo

Memo