確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.5.10

目 次

3.2. 2 次形式統計量の分布

標本分散

定義（標本分散）

$X_1, \ldots, X_n$ ：E$[X_i] = \mu$, Var$[X_i] = \sigma^2$ を持つ分布 に従う独立な確率変数

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: 標本平均

とするとき,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

を標本分散という.
標本分散は, 標本の散らばりを測る尺度として用いられる.

注意 3.2.1) S^2 は σ^2 の不偏推定量である. つまり
E$[S^2] = \sigma^2$.

Memo

Memo

行列に関する補題

補題 3.2.1 A を n 次べき等行列, つまり $A^2 = A$ とする. このとき, A の固有値は 1 か 0 となり,
$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{tr}(A)$ が成り立つ.

補題 3.2.2
A, B を n 次対称行列で $AB = O$ が成り立つとすると, A, B は共通の直交行列で対角化可能である. 特に, Λ_1 を A の非零固有値を並べた対角行列, Λ_2 を B の非零固有値を並べた対角行列とすると,

$$A = H \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} H', \ B = H \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & \Lambda_2 & O \\ O & O & O \end{pmatrix} H'$$

となる直交行列 H が存在する.

Memo

Memo

Memo

2 次形式統計量に関する定理 1

定理 3.2.1 $X_1, \ldots, X_n \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2)$ とし, $W = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ とする. このとき $W \sim \chi^2_{n-1}$ である.

Memo

Memo

2次形式統計量に関する定理2

定理 3.2.2 $Z_1, \ldots, Z_n \sim i.i.d. N(0,1)$ とし, $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$ とおく．また, A は n 次対称なべき等行列とする．このとき $\boldsymbol{Z}' A \boldsymbol{Z} \sim \chi^2_f$ である．ただし, $f = \mathrm{tr}(A)$ である．

Memo

2次形式統計量に関する定理3

定理 3.2.3 $Z_1, \ldots, Z_n \sim i.i.d. N(0,1)$ とし, $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$ とおく. また, A, B は n 次対称なべき等行列で, $\mathrm{tr}(A) = a, \mathrm{tr}(B) = b, AB = O$ とする. このとき $\boldsymbol{Z}'A\boldsymbol{Z}$ と $\boldsymbol{Z}'B\boldsymbol{Z}$ は独立である.

Memo

2次形式統計量に関する定理4

定理 3.2.4 $Z_1, \ldots, Z_n \sim i.i.d. N(0,1)$ とし, $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$ とおく. また, A は n 次対称なべき等行列, $\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_n$ を満たす n 次元ベクトルとする. このとき $\boldsymbol{Z}'A\boldsymbol{Z}$ と $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{Z}$ は独立である.

Memo

2次形式統計量に関する定理5

定理 3.2.5 $X_1, \ldots, X_n \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2)$ のとき, S と $\bar{X}$ は独立である.