確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.5.15

目 次

非心カイ 2 乗分布
分布の特性

3.3. 非心カイ 2 乗分布

定義 1

確率密度関数

$$f(y;n,\delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}}e^{-(y+\delta)/2}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{4}\right)^{j}\frac{y^{n/2+j-1}}{j!\Gamma[n/2+j]} & (y>0)\\ 0 & (y\leq 0)\end{cases}$$

$$(n\in\mathbb{N},\delta\geq 0)$$

によって定まる連続型分布を 自由度 n, 非心度 δ の非心カイ 2 乗分布といい $\chi_n^2(\delta)$ と表す.

注意 3.3.1) 一般的な定義では, n は自然数である必要はない.

注意 3.3.2) $\delta=0$ のとき, 非心カイ 2 乗分布はカイ 2 乗分布に一致する.

定義 2

$Z_1, \ldots, Z_n$ は互いに独立とし，$Z_j \sim N(\mu_j, 1)$ $(j = 1, \ldots, n)$ とする．$Y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j^2$ とおく．Y の従う分布を自由度 n，非心度 δ の非心カイ 2 乗分布といい，$Y \sim \chi_n^2(\delta)$ と表す．ただし，$\delta = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2$

注 3.3.3）こちらの定義を用いる方が多い。

注 3.3.4）Y の確率密度関数は，定義 1 の $f(y; n, \delta)$ となる。

注 3.3.5）定義 2 より，$X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で $X_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ $(j = 1, \ldots, n)$ ならば

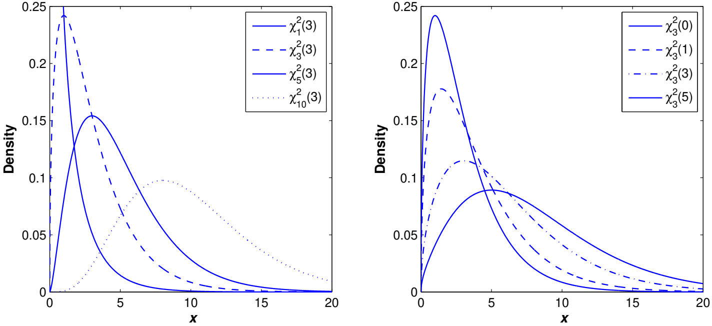
$$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \sim \chi_n^2(\delta), \quad \delta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2$$

Memo

Memo

分布の特性

1. 自由度 n, 非心度 δ の非心カイ 2 乗分布は右に歪んだ分布であり，n と δ はともに位置とばらつきの両方に関わる母数である。また，n または δ が大きくなれば正規分布に近づく



Memo

分布の特性（続き）

2. $p_j(\delta) = e^{-\delta/2}(\delta/2)^j/j!$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ とし，$f(n;k)$ を χ^2_k 分布の確率密度関数とすると
$$f(y; n, \delta) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\delta) f(y; n + 2j)$$
3. $Y \sim \chi^2_n(\delta)$ の特性関数は
$$\mathcal{C}(t) = (1 - 2it)^{-n/2} \exp\left(\frac{it\delta}{1 - 2it}\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$
4. $Y \sim \chi^2_n(\delta)$ のとき
$$\mathsf{E}[Y] = n + \delta, \ \ \mathsf{Var}[Y] = 2(n + 2\delta)$$
5. 再生性： Y_1, Y_2 は独立で，$Y_1\ \chi^2_{n_1}(\delta_1)$，$Y_2\ \chi^2_{n_2}(\delta_2)$ のとき $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}(\delta_1 + \delta_2)$ となる。

Memo

Memo