確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.5.17

目 次

正定値対称確率行列の分布

対称確率行列, 三角確率行列の密度関数

$X = (x_{ij})$: p 次対称行列, $T = (t_{ij})$: 下三角行列
下三角部分の成分を並べた $p(p+1)/2$ 次行ベクトルを
$\boldsymbol{\ell}(X), \boldsymbol{\ell}(T)$ と表す.

$$\boldsymbol{\ell}(X) = (x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots, x_{pp})$$
$$\boldsymbol{\ell}(T) = (t_{11}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, \ldots, t_{pp})$$

$S = (s_{ij})$: 上三角行列
上三角部分の成分を並べた $p(p+1)/2$ 次行ベクトルを $\boldsymbol{u}(S)$ と表す.

$$\boldsymbol{u}(S) = \boldsymbol{\ell}(S') = (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1p}, s_{22}, \ldots, s_{pp})$$

対称確率行列, 三角確率行列の密度関数 (続き)

X : $p \times p$ の確率行列で, 対称行列, 下三角行列, または上三角行列とする.
X を $\mathbb{R}^{p(p+1)/2}$ の確率ベクトルとみなして, 確率密度関数を表す. 領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{p(p+1)/2}$ に対して, X を対称行列または下三角行列, S を上三角とするとき

$$\int_{\mathcal{D}} f(X)(dX) = \int_{\mathcal{D}} f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{pp}) dx_{11} dx_{21} dx_{22} \cdots dx_{pp}$$

$$\int_{\mathcal{D}} g(S)(dS) = \int_{\mathcal{D}} g(s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{pp}) ds_{11} ds_{12} \cdots ds_{pp}$$

のように表す.

正定値対称な確率行列の変換

定理 3.4.01

X を p 次の正定値対称な確率行列とし，その確率密度関数を $f_X(X)$ とする．

$$\int_{X>0} f(X)(dX) = 1$$

ただし，$\int_{X>0}$ は領域 $\{\ell(X);\ X$ は正定値対称 $\}$ 上の積分を表すものとする．T を対角成分がすべて正の p 次下三角行列とし，$X = TYT'$ と変換する．このとき，Y の確率密度関数は

$$f_Y(Y) = |T|^{p+1} f_X(TYT')\ (Y > 0)$$

によって与えられる．

ヤコビアン

$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ の各成分が $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ の関数であるとき,

$$J(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}) := \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を表す.

行列変換のヤコビアン 1

補題 1

X を p 次正定値対称行列, T を対角成分がすべて正の p 次下三角行列とし, $Y = TXT'$ と変換する. このとき

$$|J(\boldsymbol{\ell}(X) \to \boldsymbol{\ell}(Y))| = |T|^{p+1}$$

Memo

行列変換のヤコビアン 2

補題 2

X を p 次正定値対称行列とし, $X = TT'$ と変換する. ただし, $T = (t_{ij})$ は対角成分が正の下三角行列である. このとき

$$|J(\boldsymbol{\ell}(T) \to \boldsymbol{\ell}(X))| = 2^p \prod_{j=1}^{p} t_{jj}^{p-j+1}$$

T が上三角行列で, $X = TT'$ と変換する場合は

$$|J(\boldsymbol{u}(T) \to \boldsymbol{\ell}(X))| = 2^p \prod_{j=1}^{p} t_{jj}^{j}$$

となる.

Memo

行列変換のヤコビアン 3

補題 3

$T = (t_{ij})$ を対角成分が正の p 次下三角行列とし, $S = T^{-1}$ と変換する. このとき

$$|J(\boldsymbol{\ell}(T) \to \boldsymbol{\ell}(S))| = (-1)^{p(p+1)/2}|T|^{-(p+1)}$$

Memo

行列変換のヤコビアン 4

補題 4

X を p 次正定値対称行列とし, $Y = X^{-1}$ と変換する. このとき

$$|J(\boldsymbol{\ell}(X) \to \boldsymbol{\ell}(Y))| = (-1)^{p(p+1)/2}|X|^{-(p+1)}$$

Memo

正定値対称な確率行列の変換(再掲)

定理 3.4.01
X を p 次の正定値対称な確率行列とし, その確率密度関数を $f_X(X)$ とする.

$$\int_{X>0} f(X)(dX) = 1$$

ただし, $\int_{X>0}$ は領域 $\{\boldsymbol{\ell}(X);\ X$ は正定値対称 $\}$ 上の積分を表すものとする. T を対角成分がすべて正の p 次下三角行列とし, $X = TYT'$ と変換する. このとき, Y の確率密度関数は

$$f_Y(Y) = |T|^{p+1} f_X(TYT')\ (Y > 0)$$

によって与えられる.

Memo

コレスキー分解の分布

定理 3.4.02

X を p 次の正定値対称な確率行列とし，その確率密度関数を $f_X(X)$ とする．T を対角成分がすべて正の p 次下三角行列とし，$X = TT'$ と変換する．このとき，T の確率密度関数は

$$f_T(T) = 2^p \prod_{j=1}^{p} t_{jj}^{p-j+1} f_X(TT') \ (T \in \mathcal{T})$$

によって与えられる．ただし，

$$\mathcal{T} = \{(t_{ij}) \,|\, t_{ii} > 0 \ (i = 1, \ldots, p); t_{ij} \in \mathbb{R} \ (i > j), t_{ij} = 0 \ (i < j)\}$$

逆行列の分布

定理 3.4.03
X を p 次の正定値対称な確率行列とし，その確率密度関数を $f_X(X)$ とする．このとき，$Y = X^{-1}$ の確率密度関数は

$$f_Y(Y) = |Y|^{-(p+1)} f_X(Y^{-1}) \ (Y > 0)$$

によって与えられる．

Memo

3.4. ウィシャート分布

定義 1

V を $p \times p$ 正定値対称行列とする. 確率密度関数

$$f(V; n, \Sigma) = \frac{|V|^{(n-p-1)/2} \exp\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(V\Sigma^{-1})\}}{2^{pn/2}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{n/2}\prod_{j=1}^{p}\Gamma[\frac{1}{2}(n-j+1)]}$$

$$(n \in \mathbb{N},\ n > p-1,\ \Sigma > 0)$$

によって定まる連続型分布を自由度 n のウィシャート分布といい, $W_p(n, \Sigma)$ と書く.

注 3.4.1) n は自然数でなくてもよい.

注 3.4.2) $\Sigma = I_p, p = 1$ であるとき, $W_1(n, 1)$ は自由度 n のカイ 2 乗分布となる.

定義 2

$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\boldsymbol{0}, \Sigma)$ とするとき, $V = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_j \boldsymbol{X}_j'$ の従う分布を, 自由度 n のウィシャート分布といい, $V \sim W_p(n, \Sigma)$ と書く.

注 3.4.3) こちらの定義を用いることの方が多い. $n \leq p - 1$ でも良いが, その場合は $\mathbb{R}^{p(p+1)/2}$ の確率ベクトルとして, 確率密度関数を持たない.

注 3.4.4) $n > p - 1$ のときは, V の確率密度関数は $f(V; n, \Sigma)$ となる.

注 3.4.5) $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ が独立で $\boldsymbol{X}_j \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_j, \Sigma_j)$ のとき, $V = \sum_{j=1}^{n} B_j(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j)(\boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j)' B_j'$ とすれば $V \sim W_p(n, I_p)$ となる. ただし, $B_j \Sigma_j B_j^{-1} = I_p$.

特性

1. $V \sim W_p(n, \Sigma)$ の特性関数は

$$\mathcal{C}_V(T) = |I_p - 2i\Sigma T|^{-n/2},\ T = \begin{pmatrix} t_{11} & \frac{1}{2}t_{21} & \cdots & \frac{1}{2}t_{p1} \\ \frac{1}{2}t_{21} & t_{22} & \cdots & \frac{1}{2}t_{p2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}t_{p1} & \cdots & \frac{1}{2}t_{p,p-1} & t_{pp} \end{pmatrix}$$

Memo

特性（続き）

2. $V \sim W_p(n, \Sigma)$ のとき $\mathsf{E}[V] = n\Sigma$
   $n - p - 1 > 0$ ならば, $\mathsf{E}[V^{-1}] = \Sigma^{-1}/(n - p - 1)$.

Memo

特性（続き）

3. 再生性：V_1, V_2 は独立で, $V_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, $V_2 \sim W_p(n_2, \Sigma)$ ならば $V_1 + V_2 \sim W_p(n_1 + n_2, \Sigma)$

特性（続き）

4. バートレット分解：$V \sim W_p(n, I_p)$ のとき, $T = (t_{ij})$ を対角成分が正の下三角行列で, $V = TT'$ とすると

$$t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{pp} \text{ は互いに独立.}$$
$$t_{jj}^2 \sim \chi^2_{n-j+1} \ (j = 1, \ldots, p).$$
$$t_{ij} \sim N(0,1) \ (i > j).$$

が成り立つ.