

平成 30 年 5 月 31 日

A4 の用紙に番号, 氏名, 提出日, 問題の解答を書いて

6 月 12 日 (火)

までに, 数学事務室カウンター前の指定のボックスに提出せよ.

問題 1 $X \sim P_\theta, \theta \in \Theta$ とし, X の実現値 x に基いて θ を推定する問題を考える. 決定空間を $D = \Theta$ とし, 損失関数として

$$L(\theta, d) = |\theta - d|$$

とする. 推定量 $\delta(X)$ は連続型で, その密度関数は $g(d; \theta)$ であるとする. このとき δ のリスクは g を用いて

$$R(\theta, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |d - \theta| g(d; \theta) dd$$

と表される. δ が決定関数として不偏であるための条件は任意の θ に対して

$$P_\theta(\delta(X) \leq \theta) = \frac{1}{2}$$

であることを示せ.

(ヒント: $f(\theta') = E_\theta[L(\theta', \delta(X))]$ の導関数を計算して増減表を考える.)

問題 2 $\Theta = \mathbb{R}, \mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ とし, P_θ は確率密度関数 $f(x - \theta)$ を持つとする.

$X \sim P_\theta \in \mathcal{P}$ として, X の実現値に基いて θ を推定する問題を考える.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上の変換 g_a を

$$g_a x = x - a$$

と定める.

- (1) 分布族 \mathcal{P} は変換群 $G = \{g_a; a \in \mathbb{R}\}$ の下で不変であることを示せ.
- (2) g_a に対応するパラメータ空間上の変換を \bar{g}_a とする. \bar{g}_a を求め, $\bar{G} = \{\bar{g}_a; a \in \mathbb{R}\}$ が群であることを示せ.
- (3) 損失関数を $L(\theta, d)$ とするとき, 決定問題が G の下で不変であるための必要十分条件は, “ある関数 h が存在して $L(\theta, d) = h(\theta - d)$ と表される”ことを示せ. ただし, g_a に対応する決定空間上の変換 g_a^* は $g_a^* d = \bar{g}_a d$ である.