2012 確率統計基礎講義Ｂ レポート問題 1

2012.12.20

提出締め切り 2013.1.11(金)
提出場所　　 数学事務室カウンター

問題 1. $Y = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$: 観測ベクトル

$M = (M_1, \dots, M_n)^{\mathrm{T}}$: missing pattern

ただし, $M_i = \begin{cases} 1 & y_i \text{ が観測される} \\ 0 & y_i \text{ が観測されない} \end{cases}$

とする. (スライド 15 ページと 0, 1 が逆になっているのに注意)

$(y_1, M_1), \dots, (y_n, M_n)$ は $i.i.d.$(独立同一分布) で, Y, M の同時確率密度関数が次で与えられるとする.

$$f(M, Y|\theta, \phi) = \prod_{i=1}^{n} f(M_i, y_i|\theta, \phi) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta) f(M_i|y_i, \phi)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

とする.

(1) MAR であるための条件を $f(M_i|y_i, \phi)$ を用いて表せ.

(2) $\mu = \mathrm{E}[y_i]$ が存在し, MAR であるならば $\mathrm{E}[\hat{\mu}|\sum_{i=1}^{n} M_i = r] = \mu$ $(r > 0)$ であることを示せ.

(3) $\phi > 0$ とする.

$$f(y_i|\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-y_i/\theta} & y_i > 0 \\ 0 & y_i \le 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(M_i = 1|y_i, \phi) = \begin{cases} 1 & y_i \le \phi \\ 0 & y_i > \phi \end{cases}$$

であるとき, $\mathrm{E}[\hat{\mu}|\sum_{i=1}^{n} M_i = r]$ $(r > 0)$ を求めよ.

問題 2. $(y_{i1}, y_{i2})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \overset{i.i.d.}{\sim} N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^{\mathrm{T}}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ とする．y_{i1} には欠測が起こらないとし，M_i を y_{i2} の欠測の有無を表すとする．すなわち，

$$M_i = \begin{cases} 1 & y_{i2} \text{ が観測される} \\ 0 & y_{i2} \text{ が観測されない} \end{cases}$$

とし，(y_{i1}, y_{i2}, M_i) $(i = 1, \ldots, n)$ は独立で同じ分布に従うとする．完全データによる μ_1, μ_2 の推定量を

$$\hat{\mu}_k = \frac{\sum_{i=1}^n M_i y_{ik}}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (k = 1, 2)$$

と定義する．

(1)

$$\mathrm{P}(M_i = 1 | y_{i1}, \mu_1) = \begin{cases} 1 & y_i \leq \mu_1 \\ 0 & y_i > \mu_1 \end{cases},$$

とするとき，$\mathrm{E}[\hat{\mu}_2 | \sum_{i=1}^n M_i = r]$, $\mathrm{Var}[\hat{\mu}_2 | \sum_{i=1}^n M_i = r]$ $(r > 0)$ を求めよ．

以下の小問では欠損機構は MCAR で $\mathrm{P}(M_i = 1) = \phi$ $(0 < \phi < 1)$ とする．また，$r > 0$ とする．

(2) $\mathrm{E}[\hat{\mu}_2 | \sum_{i=1}^n M_i = r]$, $\mathrm{Var}[\hat{\mu}_2 | \sum_{i=1}^n M_i = r]$ を求めよ．

(3) $\mathrm{E}[y_{i2} | y_{i1}]$ を μ_1, μ_2, ρ で表せ．

(4) ρ は既知として

$$\hat{y}_{i2} = \begin{cases} y_{i2} & M_i = 1 \\ \hat{\mu}_2 + \rho(y_{i1} - \hat{\mu}_1) & M_i = 0 \end{cases},$$

$$\hat{\mu}_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_{i2}$$

と定めるとき，$\mathrm{E}[\hat{\mu}_2^* | \sum_{i=1}^n M_i = r]$, $\mathrm{Var}[\hat{\mu}_2^* | \sum_{i=1}^n M_i = r]$ を求めよ．