確率統計特論C・確率統計特殊講義　レポート問題 (その２)

A4の用紙に，番号，氏名，提出日，問題の解答を書いて，

8月6日 (金)

までに，数学事務室カウンター横の指定のボックスに提出すること．

問題

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n), \quad X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ とし，μ の推定問題を考える．

母数空間を

$$\Theta = \{\theta = (\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

と表す．

$$G = \{g_a \mid g_a(\boldsymbol{x}) = (x_1 - a, \ldots, x_n - a),\ -\infty < a < \infty\}$$

によって変換群を定義する．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

決定空間を $D = \{d \mid -\infty < d < \infty\}$ とし，損失関数として

$$L(\theta, d) = (\mu - d)^2$$

を用いる．

(1) $g_a \in G$ に対応する母数空間 Θ の変換 $\tilde{g}_a$ を求めよ．

(2) μ の推定を考えるので，$d \in D$ に対して $\tilde{g}_a(d, \sigma^2)$ の第１成分を対応させる変換を $g^*(d)$ とする．このとき，決定問題は変換群 G の下で不変であることを示せ．

(3) 決定関数 $\delta(\boldsymbol{x})$ が共変であるならば，$\boldsymbol{y} = (x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$ の関数 $\gamma(\boldsymbol{y})$ が存在して

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \bar{x} - \gamma(\boldsymbol{y})$$

と表されることを示せ．ただし，$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ である．

(4) 共変な決定関数 δ に対して，リスク $R(\theta, \delta)$ は σ^2 のみの関数であることを示せ．

(5) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ と $\boldsymbol{Y} = (X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ は独立であることを示せ．

(6) $\delta_0(\boldsymbol{X}) = \bar{X}$ は，G の下で共変な推定量の中で，θ に関して一様にリスク $R(\theta, \delta)$ を最小とすることを示せ．