Introduction to Statistical Decision Problem

参考書：TESTING STATISTICAL HYPOTHESES,
Second Edition, E. L. Lehmann, Springer .

1　統計モデルと統計的決定問題

例 0．肝機能の診断

θ：肝機能を表す特性値

x：採血した血液中のある成分の量

$$\begin{cases} H_0: & |\theta| \le c_0 & \Rightarrow & \text{肝機能は正常} \\ H_1: & c_0 < |\theta| \le c_1 & \Rightarrow & \text{精密検査} \\ H_2: & c_1 < |\theta| \le c_2 & \Rightarrow & \text{治療} \end{cases}$$

＊．θ の値が同じでも，x の値が同じとは限らない．
θ の値が大きいとき，x の値も大きくなる傾向がある．

問題：x の値から，いかに H_0, H_1, H_2 を選択をするか．

＜統計モデル＞

データ：ある確率変数 X の実現値

$X \sim P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

P_θ：確率分布，Θ：母数空間

＊θ の値が分かれば，確率分布が分かる．

＜決定問題＞

X の実現値 x の値によって戦略を決める．

D：可能な戦略の集合

決定関数：X の値域から D への写像 $d = \delta(x)$

損失：$\Theta \times D$ 上の非負値関数 $L(\theta, d)$

戦略の良し悪しは，θ によって決まる．

期待損失：$R(\theta, \delta) = \mathrm{E}[L(\theta, \delta(X))])$

決定ルールの良し悪しの尺度

＊期待損失を最小にする決定関数を選択したい．

2　決定問題の要素

＜決定問題を解くための要素＞

分布族：$\mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$

決定空間：D

損失関数：$L(\theta, d)$

＜分布族＞

二項分布 $b(p, n)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, \cdots, n;\ 0 \le p \le 1. \tag{1}$$

ポアソン分布 $P(\tau)$

$$P(X = x) = \frac{\tau^x}{x!} e^{-x}, \qquad x = 0, 1, \cdots;\ 0 < \tau. \tag{2}$$

正規分布 $N(\xi, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\xi)^2\Big], \qquad -\infty < x < \infty;\ -\infty < \xi < \infty;\ 0 < \sigma \tag{3}$$

＜決定空間＞

例 1. $X_1, \cdots, X_n$ *i.i.d.* P_θ

$$\theta = \begin{cases} p & (\text{二項分布}) \\ \tau & (\text{ポアソン分布}) \\ (\xi, \sigma) & (\text{正規分布}) \end{cases}$$

$\gamma = \gamma(\theta)$：θ の実数値関数

(i) γ が特定の値 γ_0 より大きいかどうか判定したい．

$D = \{(d_0 : \gamma > \gamma_0),\ (d_1 : \gamma \le \gamma_0)\}$

(ii) γ の値を推定したい．

$D = \{\gamma(\theta); \theta \in \Theta\}$

(iii) $D = \{d_0, d_1, d_2\}$

$d_0 : \gamma < \gamma_0, \quad d_1 : \gamma > \gamma_1$

$d_2 : \gamma_0 \le \gamma \le \gamma_1$

例 2．$X_{ij} \sim N(\xi_i, \sigma^2)$ $(j = 1, \cdots, n_i;\ i = 1, \cdots, s)$：独立

(i) $s = 2$ の場合

平均 ξ_1, ξ_2 の間に実質的な差があるかどうか

$D = \{d_0, d_1, d_2\}$

$d_0 : |\xi_1 - \xi_2| \le \Delta, \quad d_1 : \xi_2 > \xi_1 + \Delta$

$d_2 : \xi_2 < \xi_1 - \Delta$

$s > 2$ の場合

$D = \{d_0, d_1, \cdots, d_s\}$

$d_0 : \max |d_i - d_j| \le \Delta,$

$d_k : \max |d_i - d_j| > \Delta$

and $\xi_k = \max\{\xi_1, \cdots, \xi_s\}$.

(ii) 母平均 $\xi_1, \cdots, \xi_s$ を大きさの順に並べる．

$D = \{(12\cdots s)$ の順列の全体 $\}$.

(iii) ξ_0：基準値

$\xi_i > \xi_0$ となるすべての i を選ぶ．

$D =: \{1, 2, \cdots, s\}$ のすべての部分集合の全体

例 3. $P(\tau_1), P(\tau_2)$: ポアソン分布

$\tau_1 < \tau_2$ であることは分かっているが，値は未知

$Z_1, \cdots, Z_n$: 独立な確率変数

$Z_i \sim P(\tau_1)$ or $P(\tau_2)$ $(i = 1, \cdots, n)$

$Z_i \sim P(\tau_1)$ であるすべての i を選ぶ

$D =: \{1, 2, \cdots, n\}$ のすべての部分集合の全体

例 4. $X = (X_1, \cdots, X_n)$, $X_1, \cdots, X_n \sim i.i.d. N(\xi, \sigma^2)$

ξ を含むような区間：$[l(X), u(X)]$ で，

任意の ξ, σ に対して $E(u(X) - l(X)) \le k\sigma$

を求めたい．(k は定数)

$D = \{[l, u]; -\infty < l < u < \infty\}$

＜損失関数＞

＊．数学的な扱いの容易さ ⇔ 実際の損失を反映

(例１)．(i)

$$\text{損失関数：} L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \text{正しいとき} \\ a & (d = d_0, \gamma(\theta) \le \gamma_0) \\ b & (d = d_1, \gamma(\theta) > \gamma_0) \end{cases}$$

リスク：

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} aP_\theta\{\delta(X) = d_0\} & (\gamma \le \gamma_0) \\ bP_\theta\{\delta(X) = d_1\} & (\gamma > \gamma_0) \end{cases} \tag{4}$$

(例 1).(ii)

$L(\gamma, d) = v(\gamma) w(|\gamma - d|)$　w : 増加関数

$w(0) = 0$, 2 回微分可能であるときの近似

$$L(\gamma, d) = v(\gamma)(\gamma - d)^2 \tag{5}$$

(例 3).

損失関数：$Zi \sim P(\tau_2)$ なのに，$\sim P(\tau_1)$ と判定した i の個数

＊．例１～３は，θ に関する正しい命題を選択する問題．各 θ に対して，$L(\theta, d) = 0$ となる d がただひとつ存在することが仮定される．

(例４)．

損失関数：

$$L_1(\theta, [l, u]) = \begin{cases} 0 & \xi \in [l, u] \\ |\xi - \frac{1}{2}(u + l)| \text{ の増加関数} & \xi \notin [l, u] \end{cases}$$

＊．例４では，θ の値を決めても，$L(\theta, d) = 0$ となる d が一意に決まらない．

＊．複数の損失関数を考える場合がある．

例０．

H_0 が正しいのに，H_1 を選択 ⇒ 時間と費用の浪費 ⇒ L_1

H_2 が正しいのに，H_0 を選択 ⇒ 健康に関する損害 ⇒ L_2

最適化問題

$$E[L_2(\theta, \delta(X))] \le \alpha \tag{6}$$

の条件下で，$E[L_1(\theta, \delta(X))]$ を最小にする．

(例 4).

$L_2(\theta, [l, u]) = u - l$

＜決定方法の確率化（randomization）＞

前節までの決定関数 ：各 x に，$d \in D$ がひとつ対応させる．

$\tilde{\delta}(x)$ ：各 x に，D 上の確率分布 P_x を対応させる．

$D = \{d_1, d_2\}$ の場合，x に対して，

$$\begin{cases} \text{確率 } P_x(\{d_1\}) \text{ で } d_1 \text{ を選択} \\ \text{確率 } P_x(\{d_2\}) \text{ で } d_2 \text{ を選択} \end{cases}$$

確率変数 Y ： $X = x$ が与えられたときの条件付き分布が P_x となるように定める．

⇒ 非確率化決定関数 $\delta^*(x, y) = y\ (\in D)$

＜最適性＞

決定理論の目的：リスク関数を最小にするような決定関数 δ を求める．

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))] \tag{7}$$

＊．一般に，最小値を与える δ は，θ の値によって変わる．

各 θ に対して，$L(\theta, d) = 0$ となる d がただ一つ定まるとき，$L(\theta_0, d_0) = 0$ となる d_0 を用いて，

$$\delta(x) \equiv d_0$$

と定めると，δ は，$\theta = \theta_0$ のときのみ，リスクを最小とする．

＜決定関数の制限＞

θ 特定の値について極端にリスクを小さくし，他の値に対するリスクを犠牲にするような決定関数は除外

⇒ 不変性，不偏性

このような制限下で，θ についてリスクを一様に最小とする決定関数が存在する場合がある．

＜決定関数の順序＞

δ_1, δ_2：決定関数

$\forall \theta R(\theta, \delta_1) < R(\theta, \delta_2) \Rightarrow \delta_1$ は δ_2 より優れている．

次のいずれも空集合でない場合，δ_1, δ_2 の優劣は明確でない

$\{\theta; R(\theta, \delta_1) < R(\theta, \delta_2)\}$, $\{\theta; R(\theta, \delta_1) > R(\theta, \delta_2)\}$

全ての決定関数に関して順序を与えることで決定関数の“ 最適性 ”が定義される．

3　不変性

例 8. 同じ目的を持った２種類の薬 A, B の効果を比較したい．

$X_{11}, \cdots, X_{1n}$: 薬 A を使用したときの測定

$X_{21}, \cdots, X_{2n}$: 薬 B を使用したときの測定

モデル：$X_{ij} \sim N(\xi_i, \sigma^2)$ $(i = 1, 2; j = 1, \cdots, n)$, 独立

決定空間：$D = \{d_0, d_1, d_2\}$

$d_0 : |\xi_2 - \xi_1 \le \Delta|$,

$d_1 : \xi_2 > \xi_1 + \Delta$, $d_2 : \xi_2 < \xi_1 + \Delta$

損失：d_i が正しいのに d_j を選択したことによる損失を w_{ij}

$w_{01} = w_{02}$, $w_{10} = w_{20}$, $w_{12} = w_{21}$

＊．薬 A に $i = 1$，薬 B に $i = 2$ を対応させているが，$i = 1, 2$ の役割を入れ替えても問題は変わらない．

$$\delta(x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}) = d_0, d_1, d_2$$
$$\Updownarrow$$
$$\delta(x_{21}, \cdots, x_{2n}, x_{11}, \cdots, x_{1n}) = d_0, d_2, d_1$$

が成り立たないとすると，記号の付け方に選択が左右されることになる．

例 9. $X_1, \cdots, X_n \sim \sigma^{-1} f[(x - \xi)/\sigma]$, 独立

(f：確率密度関数)

ξ の推定

損失関数：$(d - \xi)^2/\sigma^2$

データがフィート で表されていたとする．インチに変換すると，$X_i' = aX_i \sim f[(x' - \xi')/\sigma']/\sigma'$ $(a = 12)$

となるから，$\delta(X_1, \cdots, X_n)$ が ξ の推定量として適当

$\Rightarrow \delta(aX_1, \cdots, aX_n)$ は，ξ' の推定量として適当

これを，フィートで表すと

$\delta(aX_1, \cdots, aX_n)/a$

推定結果が単位の選び方に無関係であるべきならば，

$$\delta(aX_1, \cdots, aX_n)/a = \delta(X_1, \cdots, X_n)$$

＜不変性の定義＞

G を標本空間上の変換群とする．次の２つの条件が成り立つとき，決定問題は G の下で不変であるという．

(i) G は 分布族 $\mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ を不変とする．すなわち $X \sim P_\theta$ ならば，$gX \sim P_{\theta'}$ となる θ' がただひとつ存在する．このとき，θ に θ' を対応させる Θ 上の変換を $\bar{g}$ と表す．

(ii) 各 g に対して，決定空間 D 上の１対１変換 $g^* = h(g)$ が存在し，この h は準同形である．すなわち，$g_1, g_2 \in G$ に対して，$h(g_1 g_2) = h(g_1)h(g_2)$．さらに，この変換の下で，損失 L は不変，すなわち

$$L(\bar{g}\theta, g^* d) = L(\theta, d) \tag{8}$$

＊．$X' = gX$, $\theta' = \bar{g}\theta$, $d' = g^* d$ とする．

X の実現値 x によって，損失 $L(\theta, d)$ が小さくなるように d を選択する問題と，X' の実現値 x' によって，損失 $L(\theta', d')$ が小さくなるように d' を選択する問題は θ が未知ならば同じ形．

$X \sim P \in \mathcal{P}$, $x \mapsto d \in D$

$X' \sim P' \in \mathcal{P}$, $x' \mapsto d' \in D$

(X', θ', d') を新しい座標系による決定問題の表現と考える．

新しい座標系で，決定関数 δ によって 選択された $\delta(x')$ は元の座標系では，$(g^*)^{-1}\delta(x')$ と表される．

δ が座標系の選び方に無関係であるべきであれば，

$$\delta(gx) = g^* \delta(x) \quad \text{for all} \quad x, g \in G \tag{9}$$

例 10.

モデル：$X_{ij} \sim N(\xi_i, \sigma^2)$ $(i = 1, 2; j = 1, \cdots, n)$, 独立

決定空間：$D = \{d_0, d_1, d_2\}$

$d_0 : |\xi_2 - \xi_1 \le \Delta|$,

$d_1 : \xi_2 > \xi_1 + \Delta$, $d_2 : \xi_2 < \xi_1 + \Delta$

損失：d_i が正しいのに d_j を選択したことによる損失を w_{ij}

$w_{01} = w_{02}$, $w_{10} = w_{20}$, $w_{12} = w_{21}$

変換群：$G = \{g_c : c \in \mathbb{R}\}$

$g_c(x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n})$

$= (x_{11}', \cdots, x_{1n}', x_{21}', \cdots, x_{2n}')$, $x_{ij}' = x_{ij} + c$

$g \in G$ に対して $g^* d = d$ であり，$L(\bar{g}\theta, d) = L(\theta, d)$ が成立．決定問題は，G の下で不変．

＊．例 10 では，$g^* d = d$ なので，座標系の選び方に無関係な決定関数は，$\delta(gx) = \delta(x)$ を満たすことになる．このような決定関数は，変換の下で不変 (invariant) という．一方，例 8 や 例 9 では g^* は d を変えるため，(9) は，$X' = gX$ という変換とともに，別の d' を選択することを意味する．このような決定関数は，共変 (equivariant) であるという．

＜リスクの不変性＞

決定関数 δ が共変（あるいは不変）であるとすると (8), (9) より

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta) &= E_\theta[L(\theta, \delta(X))] = E_\theta[L(\bar{g}\theta, g^*\delta(X))] \\ &= E_\theta[L(\bar{g}\theta, \delta(gX))] = E_{\bar{g}\theta}[L(\bar{g}\theta), \delta(X)] \\ &= R(\bar{g}\theta, \delta) \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．したがって，共変な決定関数のリスクは $\overline{G} = \{\bar{g}; g \in G\}$ による Θ 上の軌道上で定数，特に $\overline{G}$ の Θ への作用が推移的ならばリスクは未知母数に無関係に定まることがわかる．

4 不偏性

＊．$L(\theta, d)$：損失関数

仮定１.

各 $\theta \in \Theta$ に対して，$L(\theta, d)$ を最小とする d がただ一つ存在するとする．

この d を d_θ と表し，正しい選択と呼ぶ．

仮定 2.

$d_{\theta_1} = d_{\theta_2} \Rightarrow$ 任意の d に対して $L(\theta_1, d) = L(\theta_2, d)$

このとき，$L(\theta, d')$ は，$d = d_\theta$ と d' のみで決まる．

これを，$L(d, d')$ と表す．

仮定 1, 2 の下で，次を満たすような決定関数 δ を損失関数 L に関して不偏，あるいは，L–不偏 (L–unbiased) と

いう．

$$\text{任意の}\theta, d'\text{に対して}\quad \mathrm{E}_\theta L\bigl(d', \delta(X)\bigr) \geq \mathrm{E}_\theta L\bigl(d, \delta(X)\bigr)$$

ただし，E_θ は，$X \sim P_\theta$ であることを意味し，d は，θ に対する正しい選択である．

$L(d, d')$ を d と d' の隔たりと考えると，δ が L–不偏であることは，$\delta(X)$ が平均的に，間違った選択より正しい選択に近いことを意味する．

＜不偏性の定義＞

仮定 1,2 が成り立たない場合にも，任意の θ, θ' に対して次式が成り立つとき，δ は L–不偏 (L–unbiased) という．

$$\mathrm{E}_\theta L\bigl(\theta', \delta(X)\bigr) \geq \mathrm{E}_\theta L\bigl(\theta, \delta(X)\bigr) \tag{11}$$

例 11. $X \sim P_\theta$

$D = \{[l, u]; -\infty < l < u < \infty\}$

$d = [l, u]$ に対して

$\theta \in d \Rightarrow L(\theta, d) = 0,\ \theta \notin d \Rightarrow L(\theta, d) = 1$

$\delta(X) = [L(X), U(X)]$ が L–不偏ならば

$$P_\theta\{\theta' \in [L(X), U(X)]\} \geq P_\theta\{\theta \in [L(X), U(X)]\}$$

例 12. $X \sim P_\theta,\ \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

$D = \{d_0, d_1\},\ d_i : \theta \in \Theta_i\ (i = 0, 1)$

$L(\theta, d)$:

$\theta \in \Theta_i \Rightarrow L(\theta, d_i) = 0$

$\theta \notin \Theta_0 \Rightarrow L(\theta, d_0) = a,\ \theta \notin \Theta_1 \Rightarrow L(\theta, d_1) = b$

$$\mathrm{E}_\theta L\bigl(\theta', \delta(X)\bigr) = \begin{cases} aP_\theta\{\delta(X) = d_0\} & \text{if } \theta' \in \Theta_1, \\ bP_\theta\{\delta(X) = d_1\} & \text{if } \theta' \in \Theta_0, \end{cases}$$

したがって，(11) は，

$$\theta \in \Theta_0 \Rightarrow aP_\theta\{\delta(X) = d_0\} \geq bP_\theta\{\delta(X) = d_1\}$$
$$\theta \in \Theta_1 \Rightarrow aP_\theta\{\delta(X) = d_0\} \leq bP_\theta\{\delta(X) = d_1\}$$

と同値．$P_\theta\{\delta(X) = d_0\} + P_\theta\{\delta(X) = d_1\} = 1$ より，(11) は次のように表される．

$$\begin{aligned} &\theta \in \Theta_0 \Rightarrow P_\theta\{\delta(X) = d_1\} \leq \frac{a}{a+b} \\ &\theta \in \Theta_1 \Rightarrow P_\theta\{\delta(X) = d_1\} \geq \frac{a}{a+b} \end{aligned} \tag{12}$$

例 13. $X \sim P_\theta$, θ の実数値関数 $\gamma(\theta)$ の推定

$D = \{\gamma(\theta); \theta \in \Theta\}, \quad L(\theta, d) = \{d - \gamma(\theta)\}^2$

L–不偏性の条件は，

$$\mathrm{E}_\theta\{\delta(X) - \gamma(\theta')\}^2 \geq \mathrm{E}_\theta\{\delta(X) - \gamma(\theta)\}^2 \quad \text{for all } \theta, \theta'$$

となる．$h(\theta) = \mathrm{E}_\theta\delta(X)$ を用いて

$$\{h(\theta) - \gamma(\theta')\}^2 \geq \{h(\theta) - \gamma(\theta)\}^2 \quad \text{for all } \theta, \theta'$$

となるが，$h(\theta) \in \{\gamma(\theta); \theta \in \Theta\}$ ならば，左辺 $= 0$ となる θ' が存在するので，L–不偏性の条件は

$$\mathrm{E}_\theta\delta(X) = \gamma(\theta) \quad \text{for all } \theta \tag{13}$$

と同値．

5　Bayes 法と Minimax 法

∗．決定関数に順序を与える．

＜ Bayes risk ＞

θ を確率密度関数 $\rho(\theta)$ を持つ確率変数の実現値と考える．

P_θ：θ が与えられたときの条件付き分布

$$\begin{aligned} r(\rho, \delta) &= \int \mathrm{E}_\theta L\bigl(\theta, \delta(X)\bigr)\rho(\theta)d\theta \\ &= \int R\bigl(\theta, \delta(X)\bigr)\rho(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{14}$$

を Bayes risk と呼び，最小値を与える δ を ベイズ解 (Bayes sokution) と呼ぶ．

∗．実際の場面では，θ が確率変数で，その確率密度関数が既知であることが保証されるとは限らないが，$\rho(\theta)$ を θ の重要性の度合いを表すと考えて，(14) をリスクの重みつき平均と見ることもできる．

＜ Minimax 法＞

決定関数の順序をリスクの最大値で定義する．

δ_1, δ_2 に対して，

$$\max_\theta R(\theta, \delta_1) < \max_\theta R(\theta, \delta_2)$$

のとき，δ_1 は，δ_2 よる好ましいと考える．

この意味で，最も好ましい決定関数を，ミニマックス解 (minimax solution) と呼ぶ．

6　最尤法

∗．表が出る確率が，θ であるコインがあるとする．

θ の値は，$H_0 : \theta = 0.1$ か，または $H_1 : \theta = 0.5$ であることが分かっているが，コインの見かけからは，どちらであるか区別が付かないとする．

このコインを 10 回投げてみると，表が 1 回，裏が 9 回であった．

H_0 を正しいと考える根拠：

表の回数を X とすると，

$\frac{X}{10}$ は，θ に近い値を取りやすい．

仮に，H_0 が正しいとすると，

表が 1 回となる確率は，約 39 %

仮に，H_1 が正しいとすると，

表が 1 回となる確率は，約 1 %

＜尤度関数＞

$X \sim P_\theta$

$p_\theta(x)$ ：確率関数または確率密度関数とする．

X の実現値が x であるとき，$L_x(\theta) = p_\theta(x)$ を（θ の）尤度関数と呼ぶ．尤度関数は，θ の“ もっともらしさ ” を表すと考える．

＜最尤法＞

損失関数の代わりに，利得関数 $G(\theta, d)$ を考える．

$$G(\theta, d) = \begin{cases} 0, & d \text{ が間違った選択} \\ a(\theta), & d \text{ が正しい選択} \end{cases}$$
$$a(\theta) > 0$$

決定法

$a(\theta)L_x(\theta)$ を最大とする θ に対する正しい選択肢をとる．

＊．決定問題が，θ の点推定（決定空間が，母数空間 Θ と同じ）であるとき，$a(\theta)$ を定数関数と考えると，最尤法は，$L_x(\theta)$ が最大となる θ を 選ぶことになるが，これを，θ の最尤推定量と呼ぶ．

＊．$D = \{d_0, d_1\}$，$d_i : \theta \in \omega_i \ (i = 0, 1)$ とする．

$(\Theta = \omega_0 \cup \omega_1)$

$$a(\theta) = \begin{cases} a_0, & \theta \in \omega_0 \\ a_1, & \theta \in \omega_1 \end{cases}$$

とすると，最尤法は，

$$\frac{\sup_{\theta \in \omega_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \omega_1} L_x(\theta)} > \text{ or } < \frac{a_1}{a_0} \tag{16}$$

にしたがって，d_0 または d_1 を選ぶことになる．これを，尤度比ルールと呼ぶ．

＊．最尤法は，リスクを最小とするというような明確な最適性の理論に基づくものではないが，多くの問題で有効な手段を与えている．

7　完全類（Complete Class）

＊．不変決定方式や不偏決定方式に制限しても，θ に関して一様にリスクを最小にする決定方法が存在しなかったり，一様にリスクを最小とする不偏決定方式 d_0 が存在しても，不偏でない決定方式 δ_1 で，$R(\theta, \delta_1) < R(\theta, \delta_0)$ となるようなものが存在する場合もある．

＜許容性＞

二つの決定法 δ, δ' について，次式が成り立つとき，“ δ' は δ よりも一様に好ましい（δ' dominates δ）”といって．

$$\delta' \prec \delta$$

と表す：

$$\begin{cases} R(\theta, \delta') \le R(\theta, \delta) & \text{for all } \theta \\ R(\theta, \delta') < R(\theta, \delta) & \text{for some } \theta \end{cases} \tag{17}$$

このとき，δ は，“ 非許容的である（inadmissible）”といい，このような δ' が存在しないとき，δ は“ 許容的である（admissible）”という．

(17) のうち，

$$R(\theta, \delta') \le R(\theta, \delta) \text{ for all } \theta$$

のみが成り立つとき，

$$\delta' \preceq \delta$$

と表す．

＜完全類＞

決定方式の集合 $\mathcal{C}$ が次を満たすとき，$\mathcal{C}$ は完全類 (complete class) であるという．

任意の $\delta \notin \mathcal{C}$ に対して，
$\delta' \prec \delta$ となる $\delta' \in \mathcal{C}$ が存在する．

$\mathcal{C}$ の真部分集合で，完全類であるものが存在しないとき，$\mathcal{C}$ は最小完全類 (minimal complete class) という．

上の条件の，$\delta' \prec \delta$ を $\delta' \preceq \delta$ にゆるめた条件が成り立つとき $\mathcal{C}$ は，本質的に完全である (essentially complete) という．

＊．決定問題において，最小の本質的完全類 (minimal essentially complete class) $\mathcal{C}$ が与えられると，$\mathcal{C}$ に含まれない決定方式は，リスクを小さくするという目的では選択肢から除外してよい．この意味で，最小の本質的完全類は，決定問題を可能なかぎり縮約したものと言える．

＊．完全類と，ベイズ解，ミニマックス決定方式について，非常に一般的な条件下で，次のことが証明されている．

(i) ベイズ解とその極限として表される決定方式の全体は，完全類となる．

(ii) ミニマックス決定方式は，最も不利な (least favorable) 事前分布に関するベイズ解である．
ここで，最も不利な事前分布とは，ベイズリスクが最大となるような事前分布のことである．