アフィン変換群に関する相関係数の不変推定量、不変検定

平成 20 年 7 月 29 日

決定関数の不変性

決定問題が変換群 G の下で不変であり、$g \in G$ に対応する決定空間 D 上の変換 g^* が常に恒等変換になるとき、共変な決定関数は、不変であるという。

決定問題

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \overset{i.i.d.}{\sim} p.d.f.\ N_2\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}\ \sigma_{21} \\ \sigma_{12}\ \sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

$$D = \left\{ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \,\middle|\, \sigma_{11} > 0,\ \sigma_{22} > 0,\ \sigma_{12}^2 \le \sigma_{11}\sigma_{22} \right\}$$

$$\text{損失関数}: L\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}\ \sigma_{21} \\ \sigma_{12}\ \sigma_{22} \end{pmatrix}, d\right] = l\left[\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}, d\right]$$

$$l(\rho, d) \begin{cases} = 0 & \rho = d \\ > 0 & \rho \ne d \end{cases}$$

変換群

$$G = \{g_{a_1,b_1,a_2,b_2} \mid a_1 \ne 0, a_2 \ne 0, b_1 \in \mathbf{R}, b_2 \in \mathbf{R}\}$$

$$g_{a_1,b_1,a_2,b_2}\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ Y_1 & & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1-b_1}{a_1} & \cdots & \frac{X_n-b_1}{a_1} \\ \frac{Y_1-b_2}{a_2} & & \frac{Y_n-b_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{g}_{a_1,b_1,a_2,b_2}\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}\ \sigma_{21} \\ \sigma_{12}\ \sigma_{22} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} (\mu_1 - b_1)/a_1 \\ (\mu_2 - b_2)/a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}/a_1^2 & \sigma_{21}/(a_1a_2) \\ \sigma_{12}/(a_1a_2) & \sigma_{22}/a_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

$$g^*_{a_1,b_1,a_2,b_2} d = d, \quad d \in D$$

不変推定量

$$\delta\left[\begin{pmatrix} \frac{X_1-b_1}{a_1} & \cdots & \frac{X_n-b_1}{a_1} \\ \frac{Y_1-b_2}{a_2} & & \frac{Y_n-b_2}{a_2} \end{pmatrix}\right] = \delta\left[\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ Y_1 & & Y_n \end{pmatrix}\right]$$

$$b_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, b_2 = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$a_1 = S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}, a_2 = S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})}$$

ととることにより、不変推定量は、

$$\left(Z_{1i} = \frac{X_i - \bar{X}}{S_x}, Z_{2i} = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_y}\right) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

の関数であることがわかる。

決定方法の確率化 (randomization)

(非確率化) 決定関数

$$\delta : \Omega \longrightarrow D$$

＜決定方式の確率化＞

$$Q : \Omega \longrightarrow \mathcal{Q} = \{D\ \text{上の確率分布}\}$$
$$: x \mapsto Q_x$$
$$\delta(x) : \text{確率分布}\ Q_x \text{に従う確率変数}$$

Y を、$X = x$ が与えられたときの条件付分布が Q_x となるような確率変数とし、Y の実現値によって、決定空間の元を選択する。期待損失は、

$$\mathrm{E}[L(\theta, \delta(X))] = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}[L(\theta, \delta(X))|X]] = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}[L(\theta, Y)|X]]$$

＜決定空間が高々可算集合の場合＞

$$D = \{d_1, d_2, \cdots\}, \quad d_1 < d_2 < \cdots$$

確率化決定方式を定めることは、各 x に対して、点列

$$p_1^{(x)}, p_2^{(x)}, \cdots; \quad \sum_i p_i^{(x)} = 1,\ p_i^{(x)} \ge 0$$

を定めることと同じ。

$$F^{(x)}(y) = \sum_{i: d_i \le y} p_i^{(x)}$$

$$\delta(x, u) = \min\{y; F^{(x)}(y) \ge u\}$$

と定め、X と独立な一様乱数 $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ を用いて、実現値 x, u に対して $\delta(x, u)$ を選択する。

※ D が $\mathbf{R}^p$ の部分集合のときには、$\mathcal{U}[0,1]^p$ 上の、一様乱数 $(U_1, \cdots, U_p)$ を用いて、同様に決定関数

$$\delta(x, u_1, \cdots, u_p)$$

を構成することができる。＜確率化検定の共変性＞

$$\delta(gx, u) = g^*\delta(x, u)$$

を満たすとき、確率化検定は共変であるという。

例. $D = \{H_0, H_1\}$ の場合、各 x に対して $p_x \in [0,1]$ を定め、区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数 U を用いて

$$U > p_x \quad \Rightarrow \quad H_0\text{を選択}$$
$$U \le p_x \quad \Rightarrow \quad H_1\text{を選択}$$

※ p_x は確率化検定の検定関数に相当する。

検定問題の不変性

分布族：$\mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$

決定空間：$D = \{H_0, H_1\}$

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ (帰無仮説)

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ (対立仮説, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$)

損失関数：

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 1 & (\theta \in \Theta_0 \text{かつ } d = H_1) \\ 1 & (\theta \in \Theta_1 \text{かつ } d = H_0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

期待損失は、第１種、第２種の過誤確率と一致

分布族が、変換群 G の下で不変であり、$\forall g \in G$ に対して

$$\bar{g}(\Theta_0) = \Theta_0,\ \bar{g}(\Theta_1) = \Theta_1$$

が成り立つとき、検定問題は不変であるという。このとき、決定空間上の変換 g^* は、すべて恒等変換となるので、共変な決定関数は不変検定と呼ばれる。

確率化検定が、不変であるための必要条件は、検定関数 $\phi(x)$ が不変、すなわち、

$$\phi(gx) = \phi(x)$$

を満たすことである。

無相関の不変検定

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \overset{i.i.d.}{\sim} p.d.f.\ N_2\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}\ \sigma_{21} \\ \sigma_{12}\ \sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

帰無仮説 $H_0 : \rho = \dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} = 0$

対立仮説 $H_0 : \rho \neq 0$

十分統計量

$$T = (\bar{X}, \bar{Y}, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy})$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$\phi(\begin{smallmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{smallmatrix} \cdots \begin{smallmatrix} X_n \\ Y_n \end{smallmatrix})$ を検定関数とする。

$$\phi^*(t) = \mathrm{E}\left[\phi\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ Y_1 & & Y_n \end{pmatrix}\middle| T = t\right]$$

と定義すると、

$$0 \leq \phi^*(t) \leq 1,$$

$$\mathrm{E}_\theta\left[\phi\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ Y_1 & & Y_n \end{pmatrix}\right] = \mathrm{E}_\theta[\phi^*(T)]$$

より、ϕ と ϕ^* の有意水準、検出力は同じ。

変換群によって導びかれる十分統計量の変換

$$G = \{g_{a_1,b_1,a_2,b_2} \mid a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 \in \mathbf{R}, b_2 \in \mathbf{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} X'_1 & \cdots & X'_n \\ Y'_1 & & Y'_n \end{pmatrix} = g_{a_1,b_1,a_2,b_2}\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ Y_1 & & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1 - b_1}{a_1} & \cdots & \frac{X_n - b_1}{a_1} \\ \frac{Y_1 - b_2}{a_2} & & \frac{Y_n - b_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

$$g^{(T)}_{a_1,b_1,a_2,b_2}(T) = \left(\frac{\bar{X} - b_1}{a_1}, \frac{\bar{Y} - b_2}{a_2}, \frac{S_{xx}}{a_1^2}\frac{S_{yy}}{a_2^2}, \frac{S_{xy}}{a_1 a_2}\right)$$

$b_1 = \bar{X}, b_2 = \bar{Y}, a_1 = \sqrt{S_{xx}}, a_2 = \mathrm{sign}(S_{xy})\sqrt{S_{yy}}$ ととると

$g^{(T)}_{a_1,b_1,a_2,b_2}(T) = (0, 0, 1, 1, |r|) \quad r = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$ となる

検定問題は、G の下で不変であり、十分統計量に基づく検定関数を

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, s_{xx}, s_{yy}, s_{xy})$$

とすると、ϕ が不変であるための必要十分条件は、ある関数 γ によって

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}) = \gamma(r^2)$$

と表されることである。

r^2 の確率密度関数

$r_2 = r^2$ の確率密度関数は

$$\frac{2^{n-2}(1-\rho^2)^{n/2}(1-r_2)^{(n-3)/2}}{r_2^{1/2}\pi\Gamma[n-1]}\sum_{k=0}^\infty\left[\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)\right]^2\frac{(2\rho)^{2k}r_2^k}{(2k)!}$$

一様最強力不変検定

$$H_0 : \rho = 0 \text{ v.s. } H_2 : \rho = \rho_1 \neq 0$$

に対する、r_2 による最強力検定は、ネイマン・ピアソンの補題より

$$(1-\rho_1^2)^{n/2}\sum_{k=0}^\infty\left[\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)\right]^2\frac{(2\rho_1)^{2k}r_2^k}{(2k)!} > c \quad \Rightarrow \quad \text{棄却}$$

$$\equiv \qquad r_2 > c' \quad \Rightarrow \quad \text{棄却}$$

となり、ρ_1 の値に依存しないから、r_2 を用いた検定の中で、一様最強力検定である。