確率統計特論 C・確率統計特殊講義　レポート問題 2

平成 28 年 7 月 27 日

以下は, 位置母数のピットマン推定量と呼ばれる共変推定量の導出の概要である. A4 の用紙に, 番号, 氏名, 提出日, 問題 1〜問題 6 (■ までが問題文) の解答をを書いて

8 月 5 日 (金)

までに, 数学事務室カウンター前の指定のボックスに提出せよ.

$g(x_1, \ldots, x_n)$ を n 次元連続型確率変数の確率密度関数とし, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$ に対して, 確率密度関数

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1 - \theta, \ldots, x_n - \theta)$$

によって定まる分布を P_θ と表す.

$a \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の変換 $g_a : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto g_a(x_1, \ldots, x_n)$ を

$$g_a(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a, \ldots, x_n - a)$$

とし, $G = \{g_a \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ とする.

問題 1 G は合成を積として群であることを示し, 分布族 $\mathcal{P} = \{P_\theta \,|\, \theta \in \Theta\}$ は, G の下で不変であることを示せ. また, 対応する Θ 上の変換群 $\bar{G}$ を示せ. ■

θ を推定する問題を考える. このとき, 決定空間は

$$D = \Theta$$

であり, g_a に対応する D 上の変換 g_a^* は

$$g_a^* d = d - a$$

となる.

$$G^* = \{g_a^* \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

は, D 上の変換群となり, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$(g_a g_b)^* = g_a^* g_b^*$$

が成り立つ.

問題 2 損失関数 $L(\theta, d) := (\theta - d)^2$ は G の下で不変であることを示せ. ■

定理 5.1 $(X_1, \ldots, X_n) \sim P_\theta$ とし, $\delta_0(X_1, \ldots, X_n)$ を θ の共変推定量とする.

$$y_i = x_i - x_n \ (i = 1, \ldots, n-1)$$

とする. このとき, $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ が θ の共変推定量であるための必要十分条件は, 関数 v が存在して

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta_0(x_1, \ldots, x_n) - v(y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{1}$$

と表されることである.

証明

(必要性)

$\delta(X_1, \ldots, X_n)$ が共変推定量ならば, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\delta(x_1 - a, \ldots, x_n - a) = \delta(x_1, \ldots, x_n) - a$$

が成り立つ. $a = x_n$ とると

$$\begin{aligned}
&\delta_0(x_1, \ldots, x_n) - \delta(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad = \delta_0(x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_n) - \delta(x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_n) \\
&\quad = \delta_0(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) - \delta(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)
\end{aligned}$$

したがって, $\delta_0(x_1, \ldots, x_n) - \delta(x_1, \ldots, x_n)$ は, $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ の関数である.

問題 3 十分性を証明せよ. ■

(1) によって与えられる共変推定量 δ のリスクは, θ の値に依存せず,

$$\begin{aligned}
R(\theta, \delta) = R(0, \delta) &= \mathrm{E}_{\theta=0}[\{\delta_0(X_1, \ldots, X_n) - v(Y_1, \ldots, Y_{n-1})\}^2] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}_{\theta=0}[\{\delta_0(X_1, \ldots, X_n) - v(Y_1, \ldots, Y_{n-1})\}^2 \,|\, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]\big]
\end{aligned} \tag{2}$$

と表される.

問題 4 共変推定量 $\delta_0(X_1, \ldots, X_n)$ に対して, (2) を最小とする v は

$$v(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \mathrm{E}_{\theta=0}[\delta_0(X_1, \ldots, X_n) \,|\, Y_1 = y_1, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1}]$$

によって与えられることを示せ. ■

$$\delta_0(X_1,\dots,X_n)=X_n$$

とすると, δ_0 は共変推定量である. したがって, 問題 2 の損失関数に対する θ の MRE (最小リスク共変推定量) は

$$\delta^*(X_1,\dots,X_n)=X_n-\mathrm{E}_{\theta=0}[X_n\,|\,Y_1,\dots,Y_{n-1}] \tag{3}$$

によって与えられる.

問題 5 $Y_n=X_n$ とおく. $\theta=0$ のとき, $(Y_1,\dots,Y_n)$ の同時確率密度関数を g を用いて表し,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\theta=0}[X_n\,|\,Y_1=y_1,\dots,Y_{n-1}=y_{n-1}]\\
&\quad=\mathrm{E}_{\theta=0}[Y_n\,|\,Y_1=y_1,\dots,Y_{n-1}=y_{n-1}]\\
&\quad=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}y_n g(y_1+y_n,\dots,y_{n-1}+y_n,y_n)dy_n}{\int_{-\infty}^{\infty}g(y_1+y_n,\dots,y_{n-1}+y_n,y_n)dy_n}
\end{aligned} \tag{4}$$

と表わされることを示せ ■

したがって, (3), (4) より

$$\delta^*(\boldsymbol{x})=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x_n-y_n)g(x_1-x_n+y_n,\dots,x_{n-1}-x_n+y_n,y_n)dy_n}{\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1-x_n+y_n,\dots,x_{n-1}-x_n+y_n,y_n)dy_n}$$

と表される. ($y_i=x_i-x_n$ $(i=1,\dots,n-1)$ 代入した.)

問題 6 分母、分子それぞれの積分で, $y_n=x_n-u$ と変数変換することにより

$$\delta^*(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}u\ g(x_1-u,\dots,x_n-u)du}{\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1-u,\dots,x_n-u)du} \tag{5}$$

と表されることを示せ. ■

(5) によって与えらえる共変推定量を θ の ピットマン推定量と呼ぶ.