第1 回春期研究大会論文集
学会指定課題研究の部

数学の楽しみ

青木孝子
東海大学短期大学部

要約　東海大学の付属諸機関の先生方と一緒に、静岡科学館る・く・るで、多面体工作のワークショップを行っている。対象は、未就学児・小学校低学年とその保護者である。主に、半正多面体を作成しているが、その均整のとれた美しい立体に魅了される人は少なくない。参加者たちの多くは、数学の範疇であることに気付きもせず、出来上がった感動を体験して帰っていく。現在は、正多面体は中学校で学習するが、その先の半正多面体に触れることはほとんどない。自分自身は、立体を実際に作ってみることで、立体感覚も身に付き、論理性も自ずと分かってくることを体験できた。知らず知らずのうちに数学へ魅了されていくという敷居の低さと同時に、一歩踏み入れると、奥深い広大な世界があるのが理解される。その結果、飽きることなく長続きするように感じている。数学に対しては素人であるが、数学そのものを楽しむことが可能であることを示すとともに、具体的な数学に触れることによって思考力が高まることが重要である。

キーワード　ワークショップ・多面体・工作

1. 静岡科学館る・く・るでのワークショップのための教材作成

　筆者が所属する学校法人東海大学は、建学の地である静岡に、幼稚園から大学院まで有するという利点を活かして、一貫教育に力を注いでいる。数学教育についても、各機関の教員が、有志で会合を開いている。筆者は現代経済理論を専門とし、数理経済学を中心に研究を行っている。よって純粋数学の専門家ではない。自身の教育現場を振り返ってみると、短期大学の学生たちに経済理論を教えるにも、最低限度として、一次関数は必要である。しかし実際問題として、それができない学生が多く、習得させるのが困難な状況にある。できれば微分までできてほしいのであるが、短期大学においては、そこまで至っていないのが現状である。今の学生たちがどのように初等中等教育で学んでいるのかについて、関心が高かったため、数学教育の会合に

参加することになった。

そのメンバーで、多面体工作のワークショップを行っている。共通してできることの実践の場になっているわけであるが、最初に断わっておくが、経済学で使う数学とは直接関係がない。

筆者が積極的に関わることになったきっかけがあった。それは、静岡科学館る・く・るでの研究開発費を獲得したことである。頭の中の構想段階であったが、資金獲得により、教材開発を実践する運びとなった。それは、紙で1辺を構成して多面体を作成するという方法であった。紙を折って糊で貼って、組み立てていくのである。実際に試作をしてみると、紙の形や大きさだけでなく、紙の厚さや糊との親和性など、多様な問題を解決する必要に迫られた。最後は色選びであったが、予算の都合で1色であった。科学館の活動なので男の子が多いと予想したが、女の子にも親しんでほしいと思い、暖色系の色を選んだ。こうして「多面体ピース」が出来上がった。

基本的にこの多面体ピースを用いて作成できる多面体は、半正多面体（semi-regular polyhedron）である。これには理由がある。現在、中学１年で正多面体（regular polyhedron）を学習するので、その教材見本は実に数多い。これはプラトンの立体（ solid
と呼ばれるもので、その名からも分かるように、古代ギリシア時代から5種類であることが分かっていたという。正多面体は、頂点の形状が同じであり、その構成面は1種類の正多角形であるが、これを2種類以上認め、最大のものを正十角形までとしたものが、半正多面体、つまりアルキメデスの立体(
)
である。これは13種、鏡像も入れると15種あることで知られている。[1)2)] 半正多面体でもっとも身近なものは、切頂二十面体（truncated icosihedron）であろう。これは名前の通り、正二十面体の頂点を切った形であり、いわゆるサッカーボール型である。[3)]もっとも現在の公式試合用のものは違うようである。）その黒い正五角形の周りに白い正六角形があることは知っていても、幾何学的な成り立ちがあり、正式な名称があることには、一般にはあまり知られていない。正五角形が出てくる理由は、正二十面体の頂点に正三角形が5枚集まっているからである。また、正三角形の辺の3分の1のところで頂点を切り落としているため、切られた残りの図形は、正六角形となるのである。切頂二十面体を知ることで、正二十面体に対する理解もより深まるというものである。

筆者は、まず、この切頂二十面体を作成するワークショップを想定した。切頂二十面体は辺が90ある。よって多面体ピースは９０必要となる。90枚の紙片を折って糊で貼るという作業は、大人であっても根気のいる作業である。しかも慣れないうちは、間違えながら工作をすることになる。手も糊だらけになる。これでは子供たちには難しいということで、別の半正多面体を探すこととになった。

筆者は、もちろん初等幾何の専門家ではない。早速、インターネットで検索し、他にどのような立体があるかを調べてみた。ウィキペディアが便利であった。コンピューターの画面上に立体が回っているではないか。この情報化社会においては、コンピューター上で何でも見ることができ、敢えて紙工作という原始的な活動を行うのは如何なものか、と当初は思ったものである。

結局、切頂八面体を作成することとした。理由は、36枚という比較的少ない数で作成可能であることである。つまり辺は36ある。また、正八面体の頂点を切った形なので、先ほ

どの切頂二十面体と同様の、正八面体に対する理解が深まることが期待される。さらに大きな理由は、この立体の最大の特徴であると思われる単独空間充填が体験できるということである。たくさん作って塊ができれば何と楽しいことかと、考えただけで胸がワクワクした。筆者も実際に作ってみて、初めて切頂八面体にお目に掛かることができた次第である。見慣れぬ形の立体であることが気に掛かったが、コンピューターの画面で見るよりも感動を覚えた。やはり立体は実際に作って、触って、見るものである。多少余談になるが、静岡科学館る・く・るの「る・く・る」とは、「見る・聞く・さわる」を名前の由来とするとのことである。

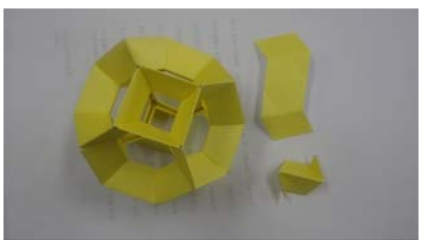
図１　切頂八面体

東海大学の諸機関の先生方にも、多面体ピースという新しい教材のお披露目をし、一緒に作成を行った。小学校の先生、中学校の数学の先生も初めて見る立体と、初めて行う工作に、最初は躊躇していたようである。

筆者自身は、半正多面体15種すべてを作成した。初めて見るものばかりである。対称性がある美しい立体に魅了された。

鏡像という言葉の意味も、実際に作成してみて理解が深まった。手のひらという意味のキラルとも表現され、その意味が実感できた。明らかに異なる立体である。平面のときには、線対称である図形は合同であったので、立体のときと意味合いが異なっている。合同について調べてみると、それは合同変換であることを知った。中学1年で学習する三角形の合同が何を意味するのか、ここで初めて気が付いた。自身のイメージをしていたことは、正確性に欠いていたものの、学習してから何十年も経って、こうした体験をすること自体には驚きと感動があった。以下、自身が興味を持って調べ、気が付いたことを述べることにする。

２．工作から見えてくるもの

（１）正多面体を切る

半正多面体が13種であることは、すでに述べたことであるが、これらはどのように考えてできたものであるのかを自然に気にするようになった。[4] 辿り着いた結論は、正多面体を切って作成されたものである、ということである。現在は紙があり、何でも紙の上に描いて考えるということが学習の主流である。いわば2時限的思考をすることに慣らされていることに気が付いた。多面体というと、展開図を組み立てる発想をする人も多いと思われる。思い切ったことを言わせて頂くと、立体を立体として捉えるには、いささか邪道である。というのも、調べていくうちに分かったことだが、展開図というのは、ドイツの画家であるアルブレヒト・デューラーが15～16世紀頃に作成したのが最初と言われている。ちなみに、彼の1514年に作成された銅版画『メランコリアＩ』には合同の凧型6つと正三角形2つからなると思われる均整のとれた多面体が描かれている。紀元前の古代ギリシア時代に、紙があるはずもなく、その時代から分かっているものを考察しているのである。紙を切って貼るのではなく、木とか石とかいった塊を切り出して作るのである。先の切頂二十面体も、正五角形の周りに正六角形がある、と表現したが、これは、正五角形

に正六角形を付けてできた多面体ではなく、あくまでも、正二十面体を切ってできた多面体なのである。その点で、立体の名前は非常にうまく付いている。これには紆余曲折もあったようで、切頂二十面体も正六角形20と正五角形12から成り立っているため、32面体という表現がされていた時期もあったようである。これでは他の32の面からなる立体と区別がつかない。半正多面体の中から一例を挙げると、二十・十二面体というのもある。初めてこの名を目にしたときには、少なからず違和感を覚えたものであるが、この表現は実に理にかなったものであると感じるようになった。専門用語の重要性を改めて実感した。

切頂四面体	truncated tetrahedron
切頂六面体	truncated hexahedron
切頂八面体	truncated octahedron
切頂十二面体	truncated dodecahedron
切頂二十面体	truncated icosahedron
立方八面体	cuboctahedron
二十・十二面体	icosidodecahedron
斜方 立方八面体	rhombicuboctahedron
斜方 二十・十二面体	rhombicosidodecahedron
斜方切頂 立方八面体	rhombitruncated cuboctahedron
斜方切頂 二十・十二面体	rhombitruncated icosidodecahedron
変形立方体	snub cube
変形十二面体	snub dodecahedron

表１　半正多面体

（２）その他の多面体

これまで半正多面体（semi-regular polyhedron）という言葉を使ってきたが、これにもこだわりがある。類似しているために混同されたと思われる言葉に、準正多面体（quasi-regular polyhedron）という語がある。semi-regular polyhedronという語のsemiを「半」とは訳すことに抵抗があって、「準」としたものと思われる。半正多面体だと正多面体の半分であるかのようである。アルキメデス立体を指して、準正多面体という語が用いられていることは、実に多いのであるが、準正多面体は、それとは別の概念であるquasi-regular polyhedronの訳に充てられるべきであるというのが筆者の考えである。準正多面体は、半正多面体、つまりアルキメデスの立体のうち、2種がこれに当たる。定義としては「頂点に対称性を持つもの」である。具体的には、立方八面体と二十・十二面体である。この2つは対称性が高いというだけでなく、双対多面体が菱形になるという特徴を持つ。双対多面体とは、面と頂点を入れ替えてできる立体のことである。正多面体は、双対多面体を考えることで、その理解が深まることはいうまでもない。それに対して半正多面体は、この準正多面体だけが双対多面体を考えることに有意味であると筆者は考えている。頂点に対称性を持つため、菱形が表れるのである。立方八面体の双対は、菱形十二面体で、菱形の対角線比は、白銀比である。また、二十・十二面体の双対は、菱形三十面体で、菱形の対角線比は、黄金比となる。

ここで菱形多面体を調べてみると、黄金比の菱形十二面体もあり、2種の菱形がある多面体も存在することが分かった。今後の工作の課題としたい。

半正多面体は、頂点の形状が同じであることが条件であるが、その条件を緩めたものが、ジョンソンーザルガラー多面体92種である。これには、アルキメデスの正角柱と反角柱は含まない。1966年にジョンソンが表を完成し、1969年にザルガラーがコンピューターを用いてこの表が完全であることを証明した。古

代ギリシアから20世紀に時代が急に新しくなっている。ジョンソンの頭文字を取って、J１～J92まで、いわば背番号が付けられている。正式名称も存在するが、この番号は便利である。[5] このジョンソンーザルガラー多面体も、多面体ピースを使って作成を試みた。しかしデルタ多面体を初め、いくつかの多面体は作成不可能であった。ジョンソンーザルガラー多面体の多くは、正多面体と半正多面体の破片体やそれらを合わせたものであるが、そうではない最後の2つ、J91とJ92は作ることができた。完成してみて、思わず歓声を上げることはなかったが、美しさのあまり息を呑んだ。

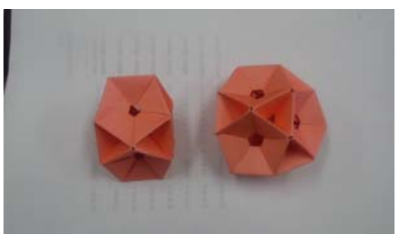
図2　J91（左）とJ92(右)

（３）空間充填

次に空間充填について関心を持った。切頂八面体が空間充填すると知っていても、どのようにくっついていくのかをイメージするのは、最初は困難であった。ぴったりと、はまったときは感動したものである。空間充填の仕方にも種類がある。それは、面心格子と体心格子である。前者は2次元、つまり平面上に見られ、方眼紙上に並んでいる、というのが筆者の見解である。後者は3次元、つまり立方体を並べたスケール上に見られる、と考えられる。

ここで、1種類の立体で、その平行移動だけで空間充填する立体を平行多面体と呼ぶ。それらは5種類、つまり平行六面体・六角柱・菱形十二面体・長菱形十二面体・切頂八面体である。最初の平行六面体には立方体も含まれる。立方体は、3次元のx軸・y軸・z軸を構成する基本となっている。ここで、数学の世界の4次元について知ることができた。4次元の4番目の軸は、時間軸であると聞いてきたが、それは物理学の世界であって、数学には時間の概念はない。よって、3次元を拡張した4次元の世界を考え、ｎ次元まで拡張することができる。これは、この平行多面体とも不思議と合致する。平行六面体は3次元の立方体であることと同様に、六角柱と菱形十二面体は4次元立方体、長菱形十二面体は5次元立方体、切頂八面体は6次元立方体の3次元モデルである。実際問題として、筆者は5次元立方体のモデルであるというところまではイメージ可能であるが、肝心の切頂八面体が6次元モデルであるというところまでは理解が及ばない。これに関しては、数学の先生方に当たってみたが、回答を得るまでに至っていない。

立方体は3次元の基本である。微分をするときに、2次が1次になるというのは、平面図形で理解していたように思う。しかし、ここに来て、3次式の、つまりｘの3乗の微分というのが、何をおこなっているのかを幾何学的に理解できた。面が3つあるというわけだが、次数が増えるにしたがって、大雑把になっていく感じが見て取れた。

話を空間充填に戻し、2種類以上の半正多面体を用いるものを作成し、体験してみた。筆者にとっては、血沸き肉躍るという表現に相応しい経験となったが、他人からは、何がそんなに面白いのかと聞かれることが多かった。空間充填というのは数学でも重要なテーマの一つであるという答えしかできない自身に何とももどかしい思いがする。

平面においては、平面充填というのが重要なテーマの一つである。[6]「数学セミナー」

2010年12月号の「エレガントな解答を求む」にジョンソンーザルガラー多面体の展開図で平面充填をする立体についての問いがあり、正解者として2011年1月号に氏名が掲載された。[7)]
前にも触れたように展開図というのは、本流から外れるような気がしていたが、平面充填と立体には、密接な関係があることが分かった。正多角形による平面充填は、その一つを変化させると、多面体になる。正三角形・正方形・正六角形は、一種類で平面充填するが、それぞれ正多面体に対応している。また2種類以上の正多角形による平面充填形は、半正多面体と密接に関わっている。[8)]

３．「多面体ピース」によるワークショップから見えてくるもの

（１）現状と問題点

話はもどり、切頂八面体のワークショップを行った。未就学児と小学校低学年が多いという静岡科学館る・く・るでは、最後は付き添いの大人が作る羽目になった。予想に反して、折り紙が好きであるという女の子が多く参加した。プラモデル好きの男の子も多く、数学とは、大人も含めて、ほぼ誰も思わずに参加をしていた。作る過程よりも出来上がった立体が欲しいのだ。それだけ美しい立体である、ということであろう。均整のとれた美しさを感じてもらうだけでも成果はあると思っている。立体の名前に関心のある人は、ほとんどいなかった。従って、正八面体の頂点を切っているという、立体の成り立ちにも関心はない。空間充填も、対して驚きも感動もしない人がほとんどであった。

中には関心や知識のある大人もいて、そうすると子供も関心を示すようである。なるべく大人に説明をするよう、心掛けたが関心を引き出すのは困難であった。工作に頭を使うという人が多かったので、脳の活性化になったようである。筆者は、数学の知識を伝授する必要があるのではないかと考えていたが、折しも、増田俊彦館長（当時）は、子供が楽しむのが一番良いと、我々のワークショップを評価してくれていた。そういうこともあり、かなり気楽に行っていた。

学生の参加もあり、授業以外の活動は、学生にとっても様々な意味での体験となったようである。例えば、この「多面体ピース」は研究開発費をもらったものの、金型を抜いて作成しているので､1 枚 3 円掛かっている。紙代だけで、切頂八面体 1 個あたり、3 円×36 枚＝108 円掛かる計算となる。100 個の立体では 10800 円となる。学生は経済観念に乏しいので、間違えると、すぐに捨ててしまう。仮に 1 割の多面体ピースを無駄にすると 1080 円の無駄になる、ということも学生は新たに知り、社会勉強になったようであった。

（２）さらなる教材開発

翌年は、JST の草の根型プログラムに採択され、補助金をもらう運びとなった。社会レベルも分かったところで、違う立体工作に着手した。金型で抜くものは費用が掛かりすぎるので、通常のコピー用紙程度の厚さの紙をハサミで切り抜いて作れるものにした。

「多面体ピース」では作ることのできない立体で、かつ基本的な立体にデルタ多面体がある。これは正三角形のみからなる立体で、８種ある。

科学の祭典では、正四面体 4 つと正八面体 1 つで空間充填をし、正四面体になることを体験するワークショップを開いた。多面体ピース」よりも容易に作成できた。

また、正四面体・正八面体・正二十面体といった、それほど身近でない正多面体も作成できた・正二十面体は、実際に作成してみて、

美しい立体であることを改めて実感した。

図 3　正二十面体

さらに容易に作成できる立体として、シール状になっている、ハサミで切り抜きができるシートを用いることを考えた。一部、穴が開いていて、面を構成していない立体となる。正三角形の紙を折って、シートで貼り合わせることで、糊を使わずに作成可能となる。シートの部分は正方形となる。正三角形を 4 分の 1 の正三角形に折って、周囲にできる正三角形を挟み込んでシートで貼る。正三角形の穴が開くように貼り合わせていくと、立方八面体ができる。12 月には、静岡科学館る・く・るにクリスマスツリーを飾り、これをクリスマスのオーナメントとして飾るワークショップを開催した。紐もシートに挟み込むようにして付けて、飾れるようにした。シートには、キラキラ光るホログラムシートというのを使い、きれいな立体に、子供も大人も喜ぶ姿が見受けられた。

なお、この方法で作成できる多面体として、正三角形でなく正方形の穴が開くように作成すると斜方立方八面体が、正五角形の穴が開くように作成すると、斜方二十・十二面体が作成できる。

図 4 立方八面体

図 5　斜方立方八面体

図 6　斜方切頂二十・十二面体

また、正三角形の紙を正六角形になるようして折っても立体を作成できる。正六角形の穴が開くようにすると切頂八面体が、正八角形の穴が開くようにすると斜方切頂立方八面体が、正十角形では斜方切頂二十・十二面体が完成する。しかし、穴の大きな立体は強度が少ないことは事実である。少なくとも、正五角形以上は、あまりお勧めできない。

4．今後の展望

学校での授業内容と離れるが、菱形多面体の作成を行ってみたい。白銀比や黄金比を含むものは、定規を使って作成するのは困難である。また、できるだけ容易に作成できる工作を考えたい。そのほうが参加者にとっては有意味になるようである。同時に、クリスマスの飾りのように、飾る実用性があるものを取り入れていきたい。そのことによって、抽象度が減少し、より身近な工作になっていくものと信じている。そのことで、今すぐにというわけではなく、将来的に、それが数学であることに気付き、そのときにまた感動が蘇ってくれば、一石二鳥である。

注釈
1） 正多面体に関しては、http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E4%BD%93
半正多面体に関しては、
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8A%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E4%BD%93
2）以下、多面体全般は次の書物に頼った。
Ｐ．Ｒ．クロムウェル『多面体』シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社 2004 年
3）サッカーボール型に関する記述は次の書物による。
谷岡一郎『エッシャーとペンローズ・タイル』ＰＨＰサイエンス・ワールド新書 2010 年
4）この部分に関する内容は、次の書物を参考にした。多面体の絵が美しいので分かりやすい。
ダウド・サットン『プラトンとアルキメデスの立体』創元社 2012 年
5）ジョンソン・ザルガラー多面体については、以下を参照した。
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B8%E3%83%A7%E3%83%B3%E3%82%BD%E3%83%B3%E3%81%AE%E7%AB%8B%E4%BD%93
6）平面充填に関しては次の書物を参考にした。対談形式なので読みやすい。
伏見康治・安野光雅・中村義作『美の幾何学』早川書房 2010 年
7）『数学セミナー』第 50 巻第 1 号日本評論社 2011 年
8）平面充填と多面体との関係は以下の書物による。一松信『数のエッセイ』筑摩書房 2007 年