第２回春期研究大会論文集
学会指定課題研究の部

ワークショップを通じた数学的発見について

青木孝子
東海大学

要　約

数学を見せるためのワークショップを、静岡科学館る・く・るで行って数年が経つ。その間、多面体の工作が多く、回数を重ねるにつれ、教材作成のアイデアも浮かぶようになってきた。出来上がった教材を使用するときには、実施方法を理解してから行っているはずであるが、実際にワークショップを行うことで、また新たな発見がある。本論は、そのことに注目をし、新たな数学的発見について、まとめたものである。
対象は、未就学児・小学校低学年とその保護者である。よって、体験者から直接的に、数学の知識を教えられることがあるわけではない。あくまでもこちらが教える立場にあるが、他人に教えることを通じて、筆者自身が自分から気が付いたのである。他人に教えてもらうことよりも、自分から理解できたもののほうが面白く感じるものである。
具体的には、切頂二十面体（サッカーボール型）の工作と、ピタゴラスパズルについて、新たな知見が得られたことについて述べる。

キーワード　自己教育・切頂二十面体・ピタゴラスパズル

1. はじめに

静岡科学館る・く・るにおいて、数学を見せるワークショップを行って、数年が経過した。見せることのできる数学は、できるだけ見せて体験をしてもらいたい、という考えから、科学館という場を借りて、ワークショップを開いてきた。その間に行ってきたものは、多面体の工作が多かった。回数を重ねていくと、新たな教材作成に意欲的になってきた。その内容については別稿に譲ることとする。本稿では、出来上がった教材を使いながら、ワークショップを行うことで新たに発見した数学知見について述べるものである。

静岡科学館る・く・るは、もともと児童館の科学部門が独立し、１０周年を迎えたところである。児童館のコンセプトが残ることもあって、対象年齢は低く、未就学児と小学校低学年がほとんどである。同時にその引率者

である保護者である。そのこともあって、その体験者の方々から、数学的知識を伝授されることはなかった。

筆者自身は、出来上がった教材の特性を十分に理解し、熟考してから、ワークショップを行ってきたはずであるが、それでも、他者に教えることを通じて、自身が気が付くことには感動を覚えるものである。自分から気付いたものは面白い。

２．切頂二十面体（サッカーボール型）の工作

これまでたびたび行ってきた切頂二十面体（サッカーボール型）の工作について、ワークショップを行うことで、数学的に気が付いたことを述べる。

正三角形２０を正六角形になるように、辺を三等分して、頂点３つを正三角形に折る。その正三角形が糊しろとなり、正五角形の穴が開くように糊付けしていくと、切頂二十面体が出来上がる。よって、正六角形２０と正五角形１２から構成される。

組み立て方は様々に考えられる。経験的に、一番分かりやすい方法として､まず5枚を使って、正五角形の穴が開くように糊付けするように説明をしている。（図1を参照）

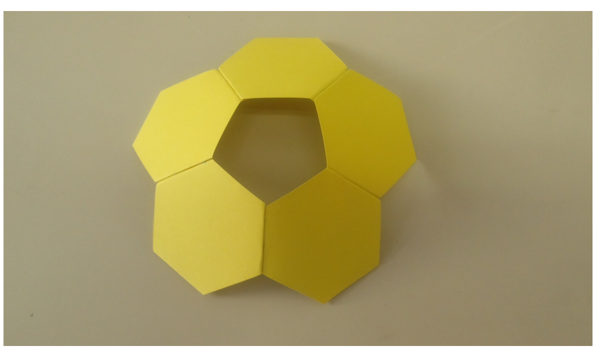

図1　正六角形５枚

この５枚に残りの１５枚を、正五角形の穴が開くように糊付けしていく、と説明をしている。ところが、複数名を相手にワークショップを行っていることもあり、組み立て方を間違えたり、説明のとおりに作らない体験者もいる。よくあるのが、この５枚に付けていくのではなく、他に同じものをもう一つ作ってしまうケースである。正五角形の穴の周りに正六角形が並んでいるが、隣の正五角形とは、正六角形が２枚共通している。立体をあまり意識せずに、深く考えずに作っていることもあるが、大抵の体験者は、このことに気が付かず、あとからくっつければいいと安易に思っているようである。

体験者が作ったものは、なるべく壊さないで活かすように修正したいものである。そこで、例えばこの正六角形５枚を２つ作ってしまったときには､どうすればいいかを考えた。これには、２つの方法があることに気が付いた。

１つめは、この正六角形５枚の２つを、残りの１０枚をジグザグと間に入れて、つなぎ合わせる方法である。これは、切頂二十面体なので、頂点を切る前の立体は、正二十面体である。その正二十面体の成り立ちは、３つの緯度で切ることができ、上下に五角錐があり、中にアルキメデスの反五角柱が入っているというものである。その考え方の応用で、頂点を切ってある立体なので、正六角形５枚が五角錐に相当する。そして、反五角柱がジグザグとつなぎ合わせた残りの１０枚に相当する。このようにして作成したものが、図３である。ここでも１０枚は、色を変えて作成してある。

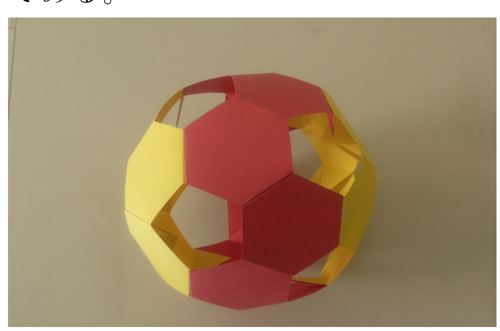

図２　正六角形５枚の２つがパラの位置関係

２つめは、こちらのほうが実際に多くおこなったが、この２つを１か所くっつける方法である。そのようにして作ると、図２のようになる。残りの１０枚は、分かるように色を変えて作成してある。この２枚の正六角形５枚の位置関係はメタと呼ばれるものである。

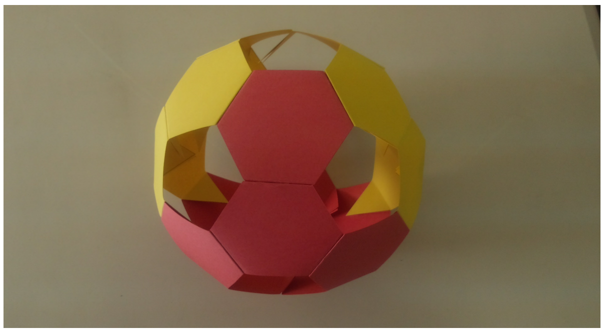

図３　正六角形５枚の２つがメタの位置関係

以上のように、正六角形５枚を２つ別に作ってしまったときは、２種類の組み立て方があることが分かった。

では、正六角形５枚を３つ作ってしまったときは、どうであるか。このときでも、残りの５枚をうまく組み立てれば、糊付けを外すことなく、切頂二十面体ができあがる。それは、以下のとおりである。残りのうち、おもてとして１枚を入れる。それは図４に示されるとおりである。この１枚は色を変えて作成している。

図４　正六角形５枚の３つのおもて

このとき、うらとして４枚を入れる。それは図５に示されるとおりである。それは図５に示されるとおりである。この４枚は色を変えて作成している。

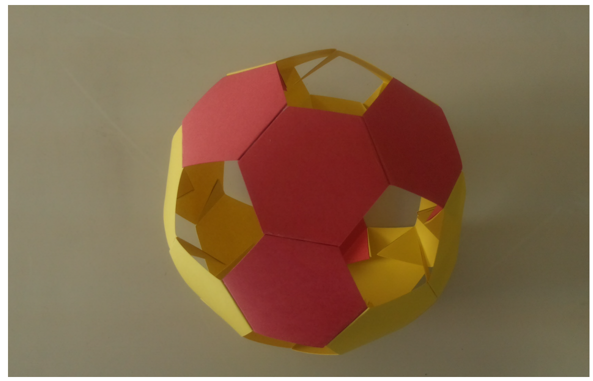

図５　正六角形５枚の３つのうら

以上のようにすると、残りの５枚がうまく入る。これには熟練がいるのは確かである。実際には、このように色分けして作るわけではないので、決して分かりやすくはない。

正六角形５枚を４つ以上作ってしまったときには、残念ながら、糊付けを外さないと切頂二十面体にはならない。

この正六角形５枚の数に注目すると、１つのとき、２種類（パラとメタ）の２つのとき、３つのとき、の合計４種あることが分かる。これはジョンソンの立体と正確に対応する。まずJ５８からJ６１である。この４つは、正十二面体に五角錐を付けたものであるが、その位置関係は上と同じである。次に、J６８からJ７１である。この４つは、切頂十二面体にJ５、つまり斜方二十・十二面体から取れる正十角形の帽子部分を付けたものである。これも、その位置関係は上と同じである。それに続く、J７２からJ７５である。この４つは、斜方二十・十二面体から正十角形の帽子部分を回転させたものである。この回転させたものの位置関係は、上と同じである。次は、最

初だけ番号が飛ぶが、Ｊ７６・Ｊ８０・Ｊ８１・Ｊ８２である。この４つは、斜方二十・十二面体から正十角形の帽子部分を欠損させたものである。この欠損の位置関係は上と同じである。このように、付けたり、回転させたり、欠損させたりしているが、その正五角形あるいは正十角形の位置関係は､この４つである。それは、切頂二十面体の正六角形５枚の位置関係と全く同じであることが分かった。つまりどのケースにおいても、１つは１種類、２つはパラとメタの２種類、３つは１種類である。

3. ピタゴラスパズル

次に、ピタゴラスの定理を応用したピタゴラスパズルのワークショップについて述べる。それは、直角三角形の周りにできる直角の位置にある２つの正方形をばらして、斜辺を１辺とする１つの正方形に入れ込むというものである。

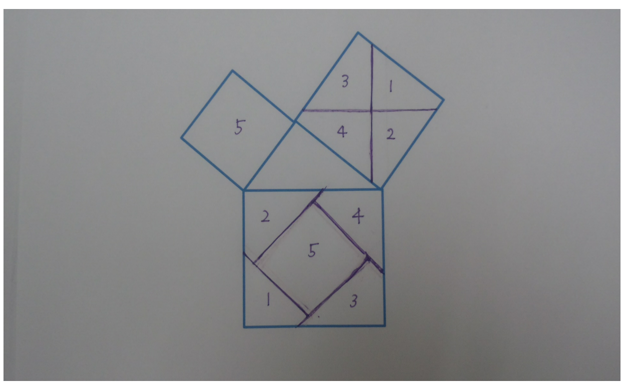

図６　ピタゴラスパズル①

まず、２つの既存のパズルが提示された。１つは、図６に示されるようなデュードニーの証明と呼ばれるものである。これはピタゴラスの定理を学ぶ中学３年生の教科書に掲載されていて、最もポピュラーな証明である。

もう一つは、レオナルド・ダ・ヴィンチの証明を応用したもので、図７に示されるものである。

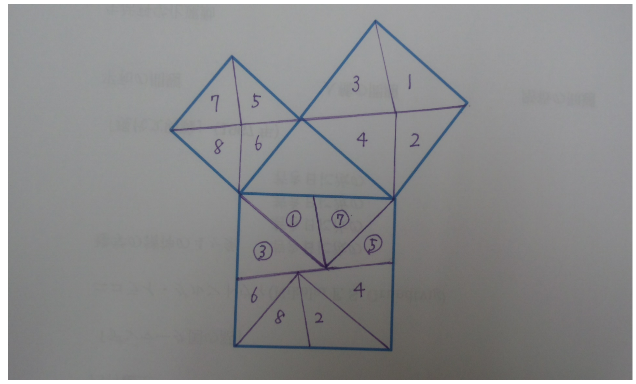

図７　ピタゴラスパズル②

これは筆者も答えを教えてもらうまで、完成できなかった。教え方として、最も分かりやすい方法を、時間を掛けて考えた。それは以下の方法であると考えた。まず、図８に示されるように、下半分を入れる。２と書かれたピースを４の下に、８と書かれたピースを６の下に入れる。このとき、正方形であるので、辺の長さは同じである。それぞれ、その同じ長さの辺が合うように入れる。このようにしてできた台形を、そのまま下にすべらせるように、正方形の下半分の台形部分を入れ込むことができる。

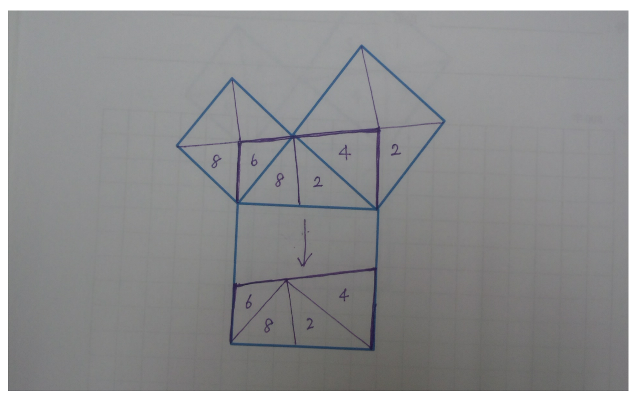

図８　ピタゴラスパズル②の説明①

残りの部分は以下のように考えた。それは図９に示されるとおりである。

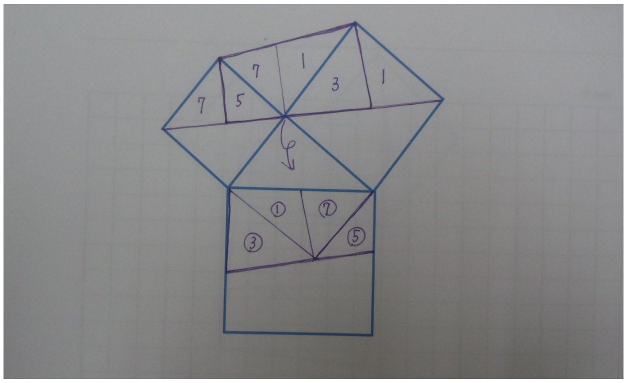

図９　ピタゴラスパズル②の説明②

１と書かれたピースを３の上に、７と書かれたピースを５の上に入れる。下半分とよく似ているが、そのまま下にすべらせるわけにはいかず、〇の付いた数字は裏返して入るものである。このようにして、上半分もきちんと入れることができる。

こちらのピタゴラスパズル②のほうが、ピタゴラスパズル①よりも、遥かに難しい。そこで、その途中の難易度のパズルを、急きょ考えることになった。そのうちの１つは、図１０にあるものである。これはピタゴラスパズル①にある中央の５と書かれたピースを右にずらし、はみ出した部分は左に６と書かれたピースとなって現れるというものである。同時に、５と書かれたピースは、上に位置する頂点が、入れ込む正方形の上の辺に付く位置にした。

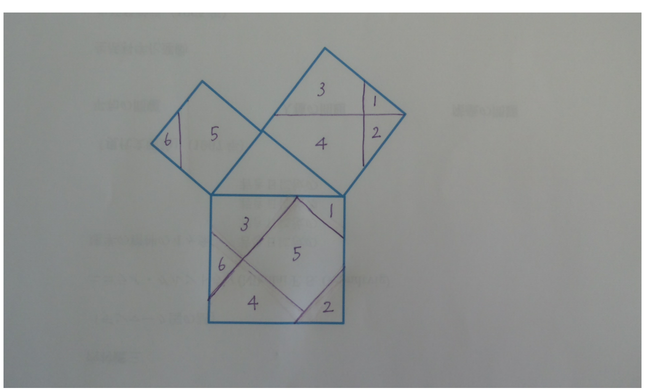

図１０　ピタゴラスパズル③

さらに、もう一つのパズルを考えた。それは図１１に示されるものである。

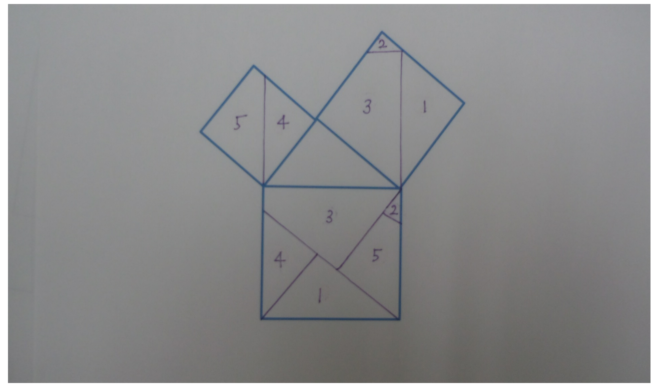

図１１　ピタゴラスパズル④

これは、入れ込む大きな正方形を、そのまま上に移動させて線を引いたものである。１と書かれたピースは、元の正三角形と合同となる。

実際にワークショップをやってみると、ピタゴラスパズル①、④、③、②の順に難しかったようである。ピタゴラスパズル②は大人でも難しく、自力で完成できた体験者にはお目に掛かれなかった。そのパズルを眺めているうちに次のことに気付いた。

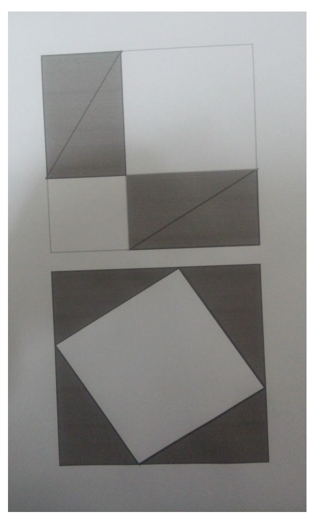

図１２　ピタゴラスの定理の証明

図１２は、パズルとは別に、ピタゴラスの定理の証明として、最もよく示される方法である。中学校でも用いられている。同じ大きさの正方形２つが上下に並んでおり、上に２つの正方形と下に１つの正方形が存在する。合同である元の直角三角形が４つずつ描かれていることから、上の２つの正方形と下の１つの正方形が同じ面積となることを示す図である。この図１２は、ピタゴラスパズル②と同じ状況を示していることを発見した。ピタゴラスパズル②に補助線を引き、図１２と整合性を持たせるように描き直したものが、図１３である。図１２の上の正方形が４５度回転していて、重なりが生じている。同様に、合同である元の直角三角形が、４つずつ出現していることが分かる。このように、最も難しいと思ったピタゴラスパズル②は、最もよく示される証明方法を応用したものであることで、より深く納得できた。同時に、幾何学の美しさについても再認識できた。

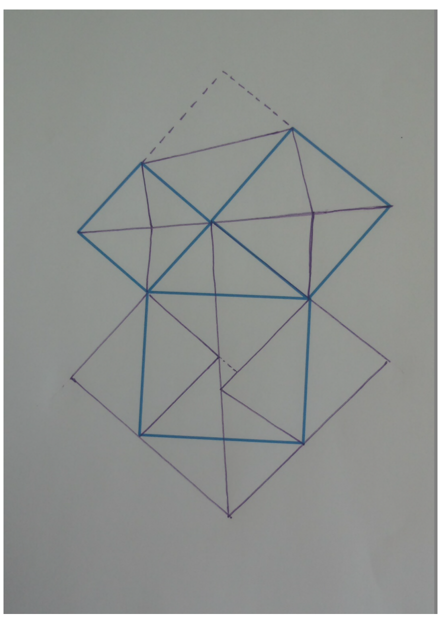

図１３ピタゴラスパズル②の説明③

４．おわりに

以上、切頂二十面体の工作とピタゴラスパズルに関して、筆者自身が新たに気付いたことについて述べた。数学的知識は他人も伝えられるが、この感動だけは、他者にはなかなか伝わらないことも経験した。それは、自分で取りに行ったものでないからである。ということは、数学（でなくとも、あらゆる学問体系）に感動させるには、自身に気付かせる工夫が必要であるということである。

平素の授業においても、とかく、手っ取り早く知識を教え込みがちであるが、時間を掛けずに詰め込んだのでは、教わるほうも面白くないはずである。教え過ぎることなく、気付かせる工夫が重要であるが、実践するのは難しいことでもある。

参考文献

１）Ｐ．Ｒ．クロムウェル(2004)『多面体』シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
２）細矢治夫(2013)『三角形の七不思議』講談社ブルーバックス