第４回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

生涯学習と数学教育

Life Long Learning of out-school and Mathematical Education of in-school

渡辺信
生涯学習数学研究所/日本数学検定協会

要　約
学校教育において重要な教科である数学は，社会に出て役立つかという問いに対して学校の教育現場では先生方が困っている．数学の教師からは数学は役立つと言いたい．しかし社会の中から学校教育を見るという問題設定は乏しい．生涯学習としての数学を足場にして数学教育を考えたときに，その必要性の重要性と教育のあいまいさを問うことと共に，現在の生涯学習から学校教育に何を問題にしたらよいかを問う．学校教育の延長線での数学の必要性を実際に行った数学教育を通して再び学校教育を問題にしたい．学校教育は素晴らしい成果を収めてはいるが，生涯学習として必要な数学教育とは何かを問題にしたい．生涯学習における数学は問題解決であり，問題発見であり，創造性豊かな発想である．最適解を見つけて行動に移り，その成果によって最適解の評価も決まる．生涯学習において誰もが解決しなくてはならない問題に対して解を求めることは，そのまま数学的活動である．

キーワード：生涯学習と数学　問題解決　問題発見　生涯学習の定義

1. 学校教育の目標－知識重視

数学教育を考えたときに学校教育は素晴らしい成果を収めている．学校教育なくして数学教育は不可能であると言っても良い．数学を学ぶことは初めから自分で考えつくと言うことは不可能に近い．現在の学校教育では数学的知識の伝承はその成果を発揮している．その学校教育の目的は生涯学習から眺めることによって変化をし始めているのではなかろうか．知識重視の教育の在り方をより進めることは生涯学習の視点からは重要である．

（１）　数学教育は技能を学ぶ

数学は人類が得た重要な知識であり，幼児期から数学的活動が始まる．数字を学ぶ前から物を数えることは身に付けている．大小関係も解るに違いない．見ることができることを理解していくと同時に隠れた部分まで見えるようになるのは不思議である．

学校教育では数学は技能の訓練の場になる．技能の最も必要なことは「四則演算」であろう．

数学の評価がこの技能によってなされることから,「数学＝計算」という考え方が出来上がっている．計算問題を繰り返し訓練することによって，数学の内容が理解できると教師も生徒も共に思いこんでいる可能性もある．ソロバンを持っていた時代から計算は得意であり誰もが身に付ける事柄として疑うことはない.計算ができることが賢くなることとして，計算中心の数学教育がおこなわれている．そして試験では必ず計算問題が課せられている．四則演算から因数分解，方程式の解を求めること，そして微分積分学に至るまで「計算」が主流を占める．大学における線形代数でも行列の計算ができること，行列式の値が求まることはできてもその意味は考えない．小学校から大学に至るまで数学教育は計算である．

数学が役に立つかを考えるときに計算技能を問題にする．その結果，日常生活において計算は役立つと考えるが，ここで指し示す計算は四則演算であり，方程式を解く「解の公式」を持ちる計算は微分積分などまったく不必要であると思う．

現在の情報化時代における社会の変化はこの計算を機械化してしまった．買い物に行ってもその場で計算が役立つことはなくなった．この結果，数学を学ぶことについての疑義が生じたとも考えられる．Technology によって数学の位置を見失う結果が生じている．数学教育が目指すことが計算技能の習得ではないとも考えられるようになった．しかし「九九表」をはじめとして今まで数学として考えられてきた日本文化から計算技能と数学を切り離すことは難しいことかもしれない．

（２） 数学教育は知識を学ぶ

学校教育における数学教育では知識を学ぶことは重要なことである．すべての数学的知識を自ら考えて作りだすことは不可能である．数学の授業内容は学ぶ側の生徒にとって常に新しく未知なことばかりである．結果的には数学的知識は常に与えられ，その与えられた知識を理解することが数学学習の重要な課題になる．この教育方法の姿は学ぶ側にとっては消極的で生徒個々人の自己主張は不可能に近い．知識を学ぶことは教科書を読むだけではなく，そこに知識を与える役としての教師の存在は必要不可欠である．このような数学教育が持つ特殊性から授業形態は「先生から生徒へ」という方向性が欠かせない.この先生から生徒への方向の中で生徒の主体性を問うことはない．主体的に数学の定理を創りだすことは不可能なこととして生徒は思い込む．

与えられた知識をいかに理解するかが問われるが，その知識の理解度は知識を用いた公式の計算問題に置き換わる．計算問題ができるということは知識が理解できたと考える節があるが，計算ができてもその知識内容は理解できているどころか，何も知らないままに計算方法を覚えていくだけである.この結果，数学的知識は役立たないと思うことはより一層増幅される．たとえば次の会話の問題点は何かを考えさせられる．

教師　「$y=x^2$ を微分しなさい」

小学生「２x」

と小学生が即座に答える．素晴らしい計算結果を正解とするがこの小学生が理解した事柄は数学的知識が何かは解らない．計算ができても微分積分という数学的知識は身に付いてはいない．

しかし数学教育にとって知識を与えることは重要な課題である．知識を自らが作り出すことは不可能に近いと同時に，一人で学ぶことも不可能である．学校教育だけが数学の知識を伝える可能性を持っている．この知識を得ることの可能性を問う時に，学校教育が重要な役割を果たしている．独りで数学の専門書を読んで数学的知識を理解することは難しいことを前提として数学教育がなされている．授業で用いる数学の教科書は薄く，その教科書の内容を説明してくれる先生を必要としている．先生がいることを前提とした教科書の

作り方からも知識は与えられるという方向性を持っていることが分かる．この知識が与えられることによって理解できるという方向が数学という学問を身に付ける問題点でもある．

（３） 数学教育は問題を解く

数学の授業は問題を解くことと考えることもできる．問題を解くことは自らがその問題を理解し，解く方向を模索して考えることを必要とするが，数学教育で行う問題解法はその時に与えられている．数学的知識を身に付けるための理解を補助することとして問題が与えられている．この問題に対してそこに例題が与えられ，その例題の解法に従って問題を解く訓練になっている．解法が付いていることは「考える」という重要な思考を奪い取ってしまっている．解法が分かると問題は簡単になる．最も解法が分かるということは問題は解けたと言っても良い．解法が与えられていることはそこにある公式に数値を代入して計算すればおのずと答えが決まる．ここでも数学教育にとって必要なことは計算技能ということになる．

（具体的に数学の説明ができるか？）
↓
数学定義(数学用語を与える)
↓
数学定理(数学の言葉で述べられる)
公式
↓
証明
↓
例題(問題を解く方法が与えられている)
問題(例題に従って解ける)

数学的知識を理解できたかの判定は問題が解けるということになるが，その問題は例題通りに解くことが求められている．問題を解くことは最も困難なこととして問題から回に至るまでの考え方が重要であるが，その重要性が失われている．数学教育において問題を解くことができることは重要な課題であるが，その解法が与えられている問題は解くことではない．

（４） 数学教育には試験がある

試験範囲が狭いときには数学は簡単に得点が取れる．これは例題の後に問題を解くことと同じで，その解法を与えられているからである．高校での数学は微分積分の範囲で行う試験と，いろいろなジャンルがある数学Ｉの試験では難しさが違う．試験問題を見てこの問題がどのようにして解くことができるかがわかった時，問題が解けたと同じである．高校のある先生と話をしているときに，数学はやはり暗記であるという．問題を見たら解法がすぐ分かるためには何回も同じような問題を解きその方法を覚えていることが必要であると言う．そして数学の試験の結果は大きく得点の差がつきやすい．数学の試験問題は数学的な知識理解にあるのではなく，覚えた公式を使うことができるかに重点が移ると，

試験の得点によって人生を左右される生徒にとって，数学の試験は数学嫌いを生む．考える時間の制約があり試験範囲が広いと考える方法に着手できない．結果的には数学の得点によって大きな開きが生じるために，できれば数学を敬遠する方が良いと考えるのは自然である.すぐに答えが出ないだけではなく，その場所で考えても手がつかない問題が多いことは数学嫌いを助長するに違いない．

（５） 数学教育が数学嫌いを生む

π＝3.14 は誰でも知っている数学の重要な数値である．しかしこの数値をどのようにして導き出したかは知らない．大学生でもほとんどの学生も知らないであろう．だれもが 3.14 は小数点以下無限に続く数値であることも知っている．証明をしなくても覚えている数値としてこの値を知っている．もし正確に計算で求めるとしたら多くの人は数学嫌いになるに違いない．このように数学の知識には証明などの説明がなくても良いことがある．小学校からの算数を見ると多くの生徒のつま

ずきは分数にあると言う．分数の概念自体が理解できないので，小学生は割合の問題が不得手であるともいわれている．そして分数の割り算の計算について教科書では次の規則「ａ/ｂ÷ｃ/ｄ＝ａ/ｂ×ｄ/ｃ」を証明する．「何故」ということは非常に重要ではあるが後から分かることもあり，あまり深入りをしない方が良いこともある．あえて証明をすることによって難しくし算数･数学嫌いを生む．

これとは反対に高校生の最も知りたいこととして，「(−1) × （−１）＝＋１」負の数同士の掛け算の符号の変化の理由を問う．しかし逆に教えないために考えることを止めてしまう．数学を理解するため成長段階を考える必要があると言われる．この成長段階を気にするあまり数学嫌いを作り出している可能性がある．数学は考えることが楽しい．その考えることをいかに導くかが学校教育では重要な課題である．

2.学校教育から生涯学習へ

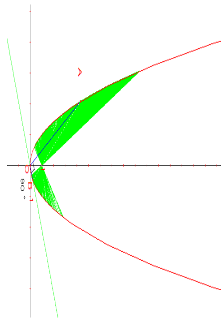
最近，学校教育では Active Learning の学びが流行している．生徒・学生が主体的に学習する方法として推奨されている．他にも多くの方法が取り入れられている．

Problem Solving（問題解決）
Creativity（創造性育成）
Technology（思考の補助としての技術）
Modeling
Do Math
Mathematical Thinking
e-Learning
Communication
Active Learning

などがある．これらは生涯学習から見ると，生涯学習の準備を学校教育が行っていると考えられる．学校教育が最近教育方法として取り入れることは生涯学習へと向かう方法論を考えているともいえよう．学校教育において数学教育は知識伝承の場として重要である．ここで得られた知識そのものではなくその思考方法が生涯学習では重要な役割を演じる．学校教育から生涯学習への橋渡しの必要性が強調されていると考えられる．そこで数学教育において行って興味深いことを例によって示す．ここでは学校教育が生涯学習のために何を行うべきかを示唆する．

（１） 数学教育は数学の問題発見が重要

ある数学の話を聞いてそこから新しい問題を発見し，発展させて考えることは大切である．問題は常に与えられるのではなく自ら発見できることを目指した発見的学習をどこかで体験することは数学教育にとって重要と考える．



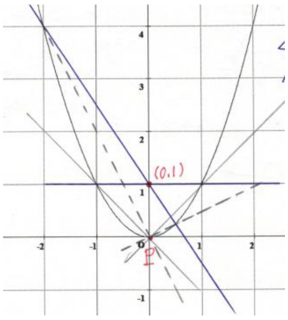
右の図は中国北京第 22 中学校の数学の実践授業報告で用いられた放物線の中に現れる不思議な定点発見であった．中学校の先生とこの授業を受けた５人の生徒が参加した．

先生が Technology を用いて放物線 $x = y^2$ 上の点 A を取り原点と結ぶ．この線分 OA に直交する OB が放物線と交わる点を B とする．∠AOB=90°の直角三角形を作る．点 A を放物線上で動かすと線分 AB は定点 P を通るらしい．この動く様子を見ていた生徒は変化しない点（不動点）があることを見つけることができる．この点 P の存在は生徒にとって魅惑的な点になった．生徒にとっては初めて見るアニメーションであり，図が動くことには感動した．そして不思議な点を見つけることができたときに感想は『すごい』と思う．このことが数学に対して心動かされ数学は楽しい教科であるという考えにいたった．

グラフを描いてみることができても数学的に理解できるのは解析的に計算をしてみたくなる．

この問題は放物線が横を向いていて馴染まな

い．



$y = x^2$

$y = ax$ ・・・・・(1)

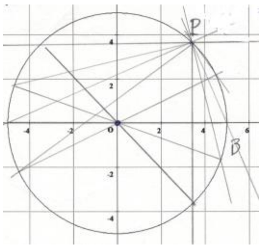
$y = -1/ax$ ・・(2)

放物線と(1) の交点を求める　A=(a, a^2)

放物線と(1) の交点を求める B=(-1/a, $1/a^2$)

直線 AB は $a(y-1) = x(a^2-1)$となり，a に依らず常に(０，１)を通ることが分かる．

計算結果が示す定点（0, 1）と Technology によって描いたグラフからの推測では『数学』という学問に差がある感じもする．この問題を改めて眺め問題を発展させてみたいと思うことは重要な数学教育の役割である．



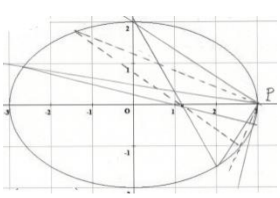
・放物線を２次曲線に変えてみたい

・点 P の位置を変える(動かす)

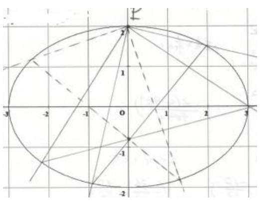
・角度 90 度を変えてみる

結果は円を扱うと定点は中心であることが分かる．そして点 P を動かしてもこの点は変わらないことは良く知られている事実である．

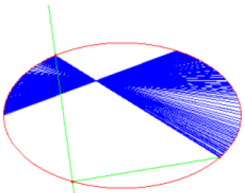
楕円にしたときに点 P の位置によって定点が変化することが分かる．



点 P が長軸上



点 P が短軸上



点 P が一般に位置

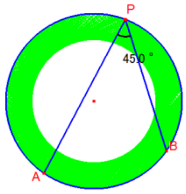
点 P を動かすと定点は楕円の中に小さな楕円を描くことが見える．

双曲線の図を描くことは全く同じことするのでやはり双曲線になってくることもわかる．

角度を 90 度から 45 度に変えたときに円上を動く点 P は包絡線として半径が

$r = \cos\theta$

になる円を描く．(θ の単位はラジアン)



直交している場合は計算は易しいが，角度が一般の場合を確かめることも計算をする楽しさがある．

（２） 数学教育は創造性育成を養う

数学教育において与えられた問題の発展とその解決，数学の眼を持って身のまわりを眺めた時の数学的問題の創造は数学的知識を身に付ける段階で必要な教育である．創造をすることを意識した数学教育によって自ら創造することを体験しておくことが必要である．

問題　循環小数について(桁数)　$(1/9)^n$ の循環の長さは $9^{(n-1)}$になるか？

この問題は与えられたのではなく問題を作り出すことができた．数学教育において問題を作ることは難しい．しかし問題を探すこと，発見することを意識していると至る所に数学の問題があることが分かる．

次の計算は可能であり結果循環小数になる．

$1/9 \quad = 0.1$

$(1/9)^2 = 0.012345679$

しかし，$(1/9)^3$ を計算したことがない．そこでこの計算は Technology によって結果を見た．$(1/9)^3$ の結果は 81 桁の循環小数であった．

0.001371742112482853223593964334705075445816186556927297668038408779149519890260631

計算は指数が小さい時は Technology は次々に答えを表示してくれる．その結果から数学的に正しい可能性のある予想を作りことができる。また，$(1/7)^n$ の循環する長さを求めることを調べることによって，作り出された数学

の予想はとなり証明ができれば定理となる．

予想　$(1/9)^n$ の循環する桁数は $1\times 9^{(n-1)}$

（３）　数学教育は問題作成を課題にする

数学の問題は定理を理解するための補助として与えられるだけではなく，自ら問題を作成することの訓練も必要になる．ただ定理の理解のためではなく問題を作るということは重要な課題になる．どのようにして問題を作るか，発見するかは興味深い数学的活動である.次の問題を作りだした経過をたどりたい．数学の問題を作ることは易しいことではない．常に数学問題作りの為にアンテナを張っていることも重要であり，問題から新しい問題へと作成することも経験しておくことは学校教育の目標にもなる．

因数分解の中に次のような問題があっても不思議ではない．しかしこの問題をいかにして作りだしたかに興味がある．

問題　因数分解をしなさい　$x^{10}-x^5+1$

この問題を見つけたのは x^n-1 の因数分解を道具を使わないで考えていったときに生まれた． $x+1$ ， x^2+1 ， $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ （ x^n+1 の指数 n が素数のときはアイゼンスタインの定理を活用する.）この 3 つを前提にしていくと， $x^{15}-1$ は 2 通りの因数分解が可能になる．

$x^{15}+1=(x^3)^5+1$

$=((x^3)+1)((x^3)^4-(x^3)^3+(x^3)^2-(x^3)+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)((x^3)^4-(x^3)^3+(x^3)^2-(x^3)+1)$

$x^{15}+1=(x^3)^5+1$

$=(x^5)^3+1=((x^5)+1)((x^5)^2-(x^5)+1)$

$=(x+1)((x^4-x^3+x^2-x^3+1)(x^{10}-x^5+1)$

因数分解の一意性から$(x^{10}-x^5+1)$は(x^2-x+1)を因数に持つことが分かる．この 2 つの方法を眺めていて作り出された問題を途中を省いて問題を作った．

問題ができるとこの問題を発展することを考えることも容易である．しかし発展させるという体験は数学教育での訓練が必要であることから学校教育の活動になる．ここでは次のような問題を考えた．

発展問題　$x^{2n}-x^ny^n+y^{2n}$ の因数分解

この問題では条件が必要になってくる可能性もある．整数係数の範囲での因数分解にしておくことも重要である．

3.生涯学習としての数学

数学教育において知識を学ぶことは学校教育に委ねる．指導者がいない生涯学習の段階では数学教育として数学を学ぶことは難しい．生涯にわたる数学を学び続けることの可能性は，数学とは何かを問い直す必要がある．日常生活において数学を学校教育と同じことの延長線上にとらえるならば，その数学は数学愛好家による数学の楽しみを追い求めることになるが，生涯学習における数学教育はすべての市民を対象にする．そこで，学校教育における数学教育を生涯学習から眺めたときに，数学的思考方法の重要性を問題にする．このように考えると数学の知識を高めるために大学に再入学をすることは学校教育の範疇であり今回の生涯学習には含めない．あくまでも学校教育と対峙させることが必要である．学びものとその指導する者との一体化を生涯学習の考え方にしたい．いつまでも学びことから独立できない数学教育が生涯学習の大きな問題点になっているのは数学の宿命かもしれない．生涯学習としての数学に付いてその定義から考え直す必要があった．数学教育での数学との違いを明確にする．

（１）　生涯学習における数学の定義

学校で学んだ数学的内容がそのままの姿で日常生活に役立つことはない．この意味では『2 次方程式の解の公式を学ぶことの意味』を問うことは重要である．2 次方程式の解の公式を持って生活に役立てることはない．しかし 2 次方程式の解を与えられた条件のもとで活用し，解を求めると言う方法は生涯学習の数学としてその方法がそのままに役立つ．生涯学習における数学の定義を次のようにす

る．

生涯学習における数学の定義
日常生活の中で関わる問題についてその解を求め，行動し，結果が評価される．この問題発見・解決のプロセスは数学の行為そのものであると考えられる．この行為を行うことはまさに数学の実践である．

この定義に従うと数学的知識は直接使う必要はない．数学の考えること，推論の進め方，解決後の吟味が重要になり数学とははなれているようにみえるが，数学教育の重要性がこの段階で明確になる．数学的な思考方法の現代化は生涯学習として現代社会に生きるためには必要なことと考えられる．ギリシャ以来の数学からの脱皮が必要で，現代数学の思考方法を学ぶことがこれからの問題点になる．

（２） 生涯学習における数学と問題解決

数学教育において問題解決は興味深い研究対象になっている．この問題解決を数学の研究範囲としてとらえたのはポリアが有名である．学問を学ぶことは「考える力を培う基盤」を目指しことである．学問の方法を具体的に，「解決すべき問題を見つけだし，その問題の制限としての条件に基づいて説明する論理を組み立て，常に論理の正しさに立ち返るとともにデータを集め，周囲の新たに起こる問題を含めた最適解によって問題を解決する」このプロセスが重要である．このような解決方法をポリアは問題解決として数学の学問の中で示した．数学的知識を学ぶことは学問の考える力を養うことに近い．この学問を学ぶことの方法として最近では Active Learning が流行している．

数学の問題解決ではポリアの解決策に付いてその考えるべき必要な 4 つ(①~④を参照）の柱をあげた．このポリアの考えは数学の世界だけではなくより広い思考方法にも活用できる．そこで「生涯学習としての数学」の定義と比較したときに数学教育として学校教育が生涯学習の基盤になっていることが分かる．

ポリアの問題解決	生涯学習の数学
① 問題を理解	問題発見・創造
↓	↓
②計画を立てる	問題
↓	↓
③計画を実行	条件吟味・データ収集
↓	↓
解	条件のもとで最適解
↓	↓
④振り返ってみる	最適解に基づく行動
↓	↓
評価	評価
↓	↓
評価から新しい問題	評価から新しい問題

4.生涯学習における数学教育の実践

生涯学習を年を取ってからも学ぶこととして考える現在社会において数学としての生涯学習では指導者を求めることになりがちである．この考え方を打ち破るための訓練が必要と考えられる．多くの人が生涯学習として数学が有用な社会になるためには学校教育の数学からの脱却が必要になっている．最近の学校教育が生涯学習の方向を向きつつあるが以前は全く数学を学ぶということは考えられなかった．生涯学習の数学は数学を学ぶことによって培われた問題解決の思考方法を活用することにある．現在の訓練を取り上げたい．

（１） 数学の楽しさを体得する必要性

生涯学習の数学への橋渡しとして『大人のための数学教室』を H 市科学館にて午前中に行ってきた．目的は一人で考えることができるようにすることであり，その過程で数学的に厳密に論理的な方向を見つけることができ日常の中での問題点をはっきりと理解するとともに，解決策を立てられる行動をすることにある．この意味から数学を学ぶことは一つの方法であって数学的知識を増やすことは目的ではない．この講座の最大の問題点は数学

嫌いが市民の中に多いことであった．集まってきた人の中でも微分という言葉だけで話の中に入れなくなる．この数学に対する嫌悪感は予想以上に強い．このような講座に集まってくる人の中にも数学は嫌いと思っている人が多いことは一般市民は数学には関心がない．初めにやることは数学が好きになること，面白いと感じることようにすることであった．そこで数学的知識を思い出すのではなく実際に手を動かして考えることから始めた．

問題　三角形の不思議な点を求める

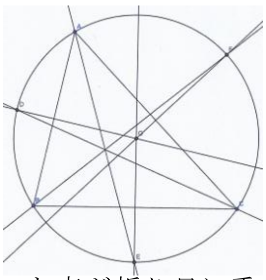
一般に三角形の不思議な点は 5 心で今回は内心・外心・重心だけを扱った．コンパスと定規を使って求める方法は学校で行ってきているので実際に紙を折って求めることにした．

三角形を規則的に折ることは次の 2 通りしかないことは前提にしても良かった．

頂点と頂点を重ねる

＝辺の垂直 2 等分線

頂点で辺と辺を合わせる＝角の 2 等分線



初めに三角形の外心に印をつけておく．そこで辺の 2 等分線を折って，開くと印をつけておいた点が折り目に乗っていることに驚く．コンパスと定規で学んだことと実際に紙を折ることとが結びついていない．

その後，紙の上でいろいろなことを考えることができる．学校では学ばなかった『新しい点』を発見して数学を楽しむことができた．

新しく発見した点は角の 2 等分線と辺の垂直 2 等分線の交点が外接円上にあり外角の等分線との交点によって外接円の直径が書ける．この不思議なことが学校の数学教育では全く問題にならなかったことは不思議であったが，生涯学習を目指した人の中から発見できたことは興味深い．

このような生涯学習に必要なこととしての数学の学び方を受講した市民の感想を示す．

・答えを探すことに挑戦する数学は面白い
・これからの社会の変化に振り回されない
・数学が面白いと感じた
・問題を拡張していく態度が身に付いた
・考えることは楽しく有意義と感じた
・数学の考え方を日常生活に応用できた
・わからないことを解決する自信がついた
・好奇心が大切は大人も同じ

『大人の数学講座』アンケートから

（２） 数学的センスと問題発見

計算ができても買い物ではすべて機械に任せてカード決算をする時代になった．その場でお金が動かないことは誤りには気が付かない．今まではお金の計算をして確かめて支払っていたが，このように数学的知識が具体的にそのまま活用できる場はなくなっていく．このようなときに数学的思考は近似計算による大まかな概数を考えることができるかは重要な知識になる．この知識を数学的センスと言いたい．数学教育は数学的知識を身に付けることによって数学的センスを養いことができる．そして実際に役立つのはこのセンスであり問題解決である．数学的センスを磨くことは学校教育の重要な課題であるとともに、その社会の文化にもかかわる。この文化との関連性は数学教育にとってはグローバルな問題とは相反することもありうる。生涯学習の視点は文化とのかかわりから新しい問題となる。

5.参考文献

G.ポリア(1945).『いかにして問題を解くか』.(柿内賢信).　丸善出版

日本数学教育学会春期大会論文集｢生涯学習｣.

渡辺信．(2013)．生涯学習を目指す数学教育の構築―なぜ生涯学習から教育を再構築したいのか―

渡辺信．(2014)．　数学教育と生涯学習－生涯学習の準備としての学校教育－

渡辺信．(2015)．生涯学習における数学 P234-248