解析学 D 演習　問題 1

2019 年 10 月 2 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ **[変数分離形]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。 ($y' = \dfrac{dy}{dx}$。可能であれば $y = f(x)$ の形で表記すること。ただし、陰関数表示の方が適当と思われる場合はそれで良い。今後も同様。)

(1) $y + xy' = 0$

(2) $\sin x \cos^2 y + y' \cos^2 x = 0$

(3) $(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$

(4) $y' = x + y$

(5) $(x - y)^2 y' = 1$

$\boxed{\mathbf{2}}$ **[同次形]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

(2) $2xyy' = y^2 - x^2$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}$ $(x \neq 1)$

ヒント

$2p - 5q + 3 = 0$、$2p + 4q - 6 = 0$ の解 p, q を用いて $x = u + p$, $y = v + q$ とおくと...

$\boxed{\mathbf{3}}$ **[完全微分形]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $(2x - 3y + 1)dx - (3x - 4y + 2)dy = 0$

(2) $(y - e^x \cos y) + (x + e^x \sin y)y' = 0$

(3) $xy^2 y' + x^3 = y^3$

(4) $(2x^2 + 3xy)dx + 3x^2 dy = 0$

(5) $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$

(4), (5) のヒント

このままでは完全微分形ではない。
では、両辺を $1/x$ や $1/y^2$ をかけたらどうか？(**積分因数**という)

$\boxed{\mathbf{4}}$ **[非斉次 1 階線形微分方程式]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $xy' + y = x(1 - x^2)$　$(x > 0)$

(2) $(1 + x^2)y' = xy + x$

(3) $y' + \dfrac{y}{x} = \sqrt{x}$

(4) $\dfrac{y'}{\cos^2 y} + \tan y = x$