解析学 D 演習　問題2

2019 年 10 月 2 日

ポイント

以下の問題では、様々な変数変換を用いて非斉次 1 階微分方程式の形にしたのち、解を求める。その際、以下の解の公式を用いて良い。

$y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解の公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

$\boxed{5}$ **[Bernoulli 型]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' + y = xy^3$

(2) $xy' + y = x^3y^2$

(3) $y' + xy = \dfrac{x}{y}$

(4) $yy' + y^2 = e^x$

注意点

どの問題も実は変数分離法で解けるが、ベルヌーイ型の変数変換 ($z = y^{1-k}$) を使って解くこと。

$\boxed{6}$ **[Riccati 型]** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' + y^2 + 3y - 4 = 0$

(2) $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$

(3) $y' + (2x + 3)y - (x + 2)y^2 = x + 1$

(4) $y' - e^{-x}y^2 + y - e^x = 0$

$\boxed{7}$ **[Clairaut 型]** 以下の微分方程式の一般解、および、一般解のすべての曲線群に接する包絡線（特異解）を求めよ。

(1) $y = xy' - 2(y')^2$

(2) $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$

(3) $y = xy' + \dfrac{1}{2(y')^2}$

(4) $y = xy' - \log y'$

(5) $y = (x + 1)y' - (y')^2$

$\boxed{8}$ **[d'Alembert 型]** 以下の微分方程式の一般解、および特異解が存在する場合は特異解も求めよ。

(1) $y = 2xy' + (y')^2$

(2) $y = y' + x(y')^2$

(3) $y = 2x(y' + 1) + (y')^2$