解析学 D 演習 小テスト 1 解答　　2019 年 10 月 11 日

解答

(1) $y' = \dfrac{\sin x}{\cos y}$

$\cos y \ dy = \sin x \ dx$

$\int \cos y \ dy = \int \sin x \ dx$

$\sin y + \cos x = C$

(2) $x \neq -\dfrac{1}{2}$ かつ $y \neq 1$ のとき

$\dfrac{dy}{y-1} = -\dfrac{dx}{2x+1}$

$\int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{dx}{2x+1}$

$\log|y-1| = -\frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

$\log|y-1|\sqrt{|2x+1|} = C$

$|y-1|\sqrt{|2x+1|} = e^C$

$(y-1)\sqrt{|2x+1|} = \pm e^C = C'$

$x = -\dfrac{1}{2}$ および $y = 1$ のときも解であり、$C' = 0$ のときに得られる。

(3) $u = \sqrt{2x-y+3}$ とおき、両辺 x で微分すると、$\dfrac{du}{dx} = \left(2 - \dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{1}{2u} = -\dfrac{u-2}{2u}$

$u = 2$ のとき、$\sqrt{2x-y+3} = 2$ より $y = 2x-1$ となり、$y' = u = 2$ を満たす。

$u \neq 2$ のとき

$2\displaystyle\int \frac{u}{u-2}du = -\int dx$

$2\int \left(1 + \frac{2}{u-2}\right) du = -\int dx$

$2u + 4\log|u-2| = -x + C$

$2\sqrt{2x-y+3} + 4\log|\sqrt{2x-y+3} - 2| = -x + C$

または $y = 2x - 1$

(4) $x - y = u$ とおき、両辺 x で微分すると、

$\dfrac{du}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}$

$u^2(1 - \dfrac{du}{dx}) = 1$

$u^2\dfrac{du}{dx} = 1 - u^2$

$u=\pm 1$ のとき、関数としての u は常に定数であり、u' に関する微分方程式 $(u'=0)$ を満たす。$u\neq\pm 1$ のとき

$$\int \frac{u^2}{u^2-1}du=\int dx$$

$$\int \left\{1+\frac{1}{(u-1)(u+1)}\right\}du=\int dx$$

$$\int \left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\right)du=\int dx$$

$$u+\frac{1}{2}\log|u-1|-\frac{1}{2}\log|u+1|=x+C$$

$$x-y+\frac{1}{2}\log|x-y-1|-\frac{1}{2}\log|x-y+1|=x+C$$

$$\log\frac{|x-y-1|}{|x-y+1|}=2y+2C$$

$$\frac{x-y-1}{x-y+1}=C'e^{2y}\quad (C'=\pm e^{2C})$$

または $x-y=-1$

(5) $x\neq 0$ として両辺 x^2 で割ると、

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)y'=2\frac{y}{x}$$

$u=\dfrac{y}{x}$ とおくと、$y'=\dfrac{d}{dx}(ux)=x\dfrac{du}{dx}+u$ となるので、

$$\frac{du}{dx}=\frac{y'-u}{x}=\frac{\frac{2u}{1-u^2}-u}{x}=\frac{u(1+u^2)}{x(1-u^2)}$$

$u=0$ のとき、すなわち $y=0$ のとき $y'=0$ となり、解。

$u\neq 0$ のとき

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\log|u|-\log(1+u^2)=\log|x|+C$$

$$\frac{|\frac{y}{x}|}{|x|(1+\frac{y^2}{x^2})}=e^C$$

$$\frac{|y|}{x^2+y^2}=e^C$$

$$x^2+y^2=C'y\quad (C'=\pm e^{-C})$$

(6) $x+y+3=0$ と $x-y+1=0$ を同時に満たすのは、$x=-2, y=-1$。したがって、$x=X-2, y=Y-1$ の変数変換を考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

$X \neq 0$ のとき

$z = \dfrac{Y}{X}$ とおくと

$$\frac{dz}{dX} = \frac{\frac{dY}{dX} - z}{X} = \frac{\frac{X+Y}{X-Y} - z}{X} = \frac{\frac{1+z}{1-z} - z}{X} = \frac{1+z^2}{X(1-z)}$$

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dX}{X}$$

$$\tan^{-1} z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log|X| + C$$

$$2\tan^{-1} z = \log\left\{X^2(1+z^2)\right\} + C$$

$$2\tan^{-1} \frac{Y}{X} = \log(X^2+Y^2) + C$$

$$2\tan^{-1} \frac{y+1}{x+2} = \log\left\{(x+2)^2 + (y+1)^2\right\} + C$$

$X = 0$ すなわち $x = -2$ を満たす解はない。

(7) $P(x,y) = e^y, Q(x,y) = xe^y - 3y^2$ とおく。

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^y$ となるため、完全微分形。したがって、

$\displaystyle\int P(x,y)dx = xe^y + R(y)$ であるから

$\frac{\partial}{\partial y}(xe^y + R(y)) = xe^y + R'(y) = xe^y - 3y^2$ となり、$R(y) = -y^3 + C$。

よって求める解は $xe^y - y^3 = C$

(8) 積分因数として両辺に $x^m y^n$ をかけると、

$$(3x^{m+1}y^{n+1} - 2x^m y^{n+2})dx + (x^{m+2}y^n - 2x^{m+1}y^{n+1})dy = 0$$

$P(x,y) = 3x^{m+1}y^{n+1} - 2x^m y^{n+2}, Q(x,y) = x^{m+2}y^n - 2x^{m+1}y^{n+1}$ とおく。これが完全微分形になるには、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3(n+1)x^{m+1}y^n - 2(n+2)x^m y^{n+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (m+2)x^{m+1}y^n - 2(m+1)x^m y^{n+1}$$

の各係数を比較して、同じになれば良い。したがって、

$$\begin{cases} 3(n+1) = m+2 \\ 2(n+2) = 2(m+1) \end{cases}$$

を満たす (m,n) の組みを求めると、$m = 1, n = 0$。

よって、$P(x,y) = 3x^2y - 2xy^2, Q(x,y) = x^3 - 2x^2y$

$\displaystyle\int P(x,y)dx = x^3y - x^2y^2 + R(y)$ であるから

$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y - x^2y^2 + R(y)) = x^3 - 2x^2y + R'(y) = x^3 - 2x^2y$ となり、$R(y) = C$。

よって求める解は $x^3y - x^2y^2 = C$

(9) $xy' + y = 0$ について考える。$y \neq 0$ のとき、両辺を整理すると

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\log|y| = -\log x + C$$

$$|y| = \frac{e^C}{x}$$

$$y = \frac{C'}{x} \quad (C' = \pm e^C)$$

C' を x の関数 $u(x)$ と置き換え、上式をもともとの微分方程式に代入すると

$$x \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{x}\right) + \frac{u(x)}{x} = x \log x$$

$$x \frac{u'(x)x - u(x)}{x^2} + \frac{u(x)}{x} = x \log x$$

$$u'(x) = x \log x$$

$$u(x) = \int x \log x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x} dx + C''$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C''$$

$y \neq 0$ のときは式を満たさないので、求める解は $y = \frac{x}{2} \log x - \frac{x}{4} + \frac{C''}{x}$

(10) $(1 + x^2)y' = xy$ について考える。$y \neq 0$ のとき、両辺を整理すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + C$$

$$|y| = e^C \sqrt{1 + x^2}$$

$$y = C' \sqrt{1 + x^2} \quad (C' = \pm e^C)$$

C' を x の関数 $u(x)$ と置き換え、上式をもともとの微分方程式に代入すると

$$(1 + x^2) \frac{d}{dx}\left(u(x)\sqrt{1 + x^2}\right) = u(x)\sqrt{1 + x^2} + 2 \log x$$

$$(1 + x^2)(u'(x)\sqrt{1 + x^2} + \frac{u(x)}{\sqrt{1 + x^2}}) = u(x)\sqrt{1 + x^2} + 2 \log x$$

$$u'(x) = \frac{2 \log x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x) = \int \frac{2 \log x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' \log x dx = \left(\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \log x - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + C''$$

$$= \frac{2x\log x}{\sqrt{1+x^2}} - 2\sinh^{-1}x + C''$$

$y \neq 0$ のときは式を満たさないので、求める解は $y = 2x\log x - (2\sinh^{-1}x + C'')\sqrt{1+x^2}$