解析学 D 演習 小テスト 2 解答

2019 年 10 月 23 日

- 最終的な解があっていれば 10 点。ただし場合分けがないときはそれぞれ記載の点数を減点。
- 最終的な解があっていなくても、途中までの部分があっていれば記載の部分点を加点。
- Clairaut 型や d'Alembert 型は特異解まで求めているか確認。
- d'Alembert 型で媒介変数まで消去していれば、オマケ+2 点。

解答

(1) Clairaut 型

一般解：$y = Cx + \dfrac{4}{C}$.

特異解：一般解を C で偏微分すると $x = 4C^{-2}$.

したがって,

$$\begin{cases} x = 4C^{-2} \\ y = Cx + \dfrac{4}{C} \end{cases}$$

より $y^2 = 16x$. よって特異解は $y = \pm 4\sqrt{x}$.

(2) Bernoulli 型

$y \neq 0$ として、両辺 y^{-4} をかけると $y^{-4}y' + \dfrac{y^{-3}}{x} = \dfrac{2}{3}$.

ここで, $z = y^{-3}$ とおくと $z' - \dfrac{3}{x}z = -2$.

したがって,

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{3}{x}dx}\left(-2\int e^{-\int \frac{3}{x}dx}dx + C\right) \\ &= x^3(x^{-2} + C) \\ y^{-3} &= x + Cx^3 \end{aligned}$$

よって解は $y = \left(\dfrac{1}{x + Cx^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(3) Ricatti 型

$y = 2x$ は特殊解の 1 つなので, $y = 2x + u$ とおき元の式に代入すると,

$$\begin{aligned} 2 + u' - \frac{2x+u}{x} + \frac{(2x+u)^2}{x} &= 4x \\ u' + \left(4 - \frac{1}{x}\right)u &= -\frac{1}{x}u^2 \end{aligned}$$

となり, Bernoulli 型に帰着できる.

$u \neq 0$ として、両辺 u^{-2} をかけ $z = u^{-1}$ とおくと $z' + \left(\dfrac{1}{x} - 4\right)z = \dfrac{1}{x}$.

したがって,

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int\left(\frac{1}{x}-4\right)dx}\left(\int \frac{1}{x}e^{\int\left(\frac{1}{x}-4\right)dx}dx + C'\right) \\ &= \frac{e^{4x}}{x}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x} + C'\right) \\ u &= \frac{4x}{-1 + Ce^{4x}} \\ y &= 2x + \frac{4x}{-1 + Ce^{4x}} \end{aligned}$$

よって解は $y = \dfrac{2x(Ce^{4x} + 1)}{Ce^{4x} - 1}$.

(4) Clairaut 型

一般解：$y = Cx + \dfrac{C^2}{2}$.

特異解：一般解を C で偏微分すると $x = -C$. したがって,

$$\begin{cases} x = -C \\ y = Cx + \dfrac{C^2}{2} \end{cases}$$

より, 特異解は $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

(5) Ricatti 型

$y = 5$ は特殊解の 1 つなので, $y = 5 + u$ とおき元の式に代入すると,

$$\begin{aligned} u' + (5+u)^2 - 2(5+u) - 15 &= 0 \\ u' + 8u &= -u^2 \end{aligned}$$

となり，Bernoulli 型に帰着できる．

$u \neq 0$ として、両辺 u^{-2} をかけ $z = u^{-1}$ とおくと $z' - 8z = 1$.

したがって,

$$\begin{aligned} z &= e^{8x}\left(\int e^{-8x}dx + C'\right) \\ &= \frac{-1+Ce^{8x}}{8} \\ u &= \frac{8}{-1+Ce^{8x}} \\ y &= 5 + \frac{8}{-1+Ce^{8x}} \end{aligned}$$

よって解は $y = \dfrac{5Ce^{8x}+3}{Ce^{8x}-1}$.

(6) d'Alembert 型

$y' = p$ とおくと，$y = 2xp + p^2$.

これを両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} p &= 2p + 2xp' + 2pp' \\ 2p'(x+p) &= -p \end{aligned}$$

(i) $p \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= -\frac{2(x+p)}{p} \\ \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{2}{p}dp}\left(-2\int e^{-\int \frac{2}{p}dp}dp + C\right) \\ &= p^{-2}\left(-2\int p^2 dp + C\right) \\ &= -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{C}{p^2} \\ y = 2xp + p^2 \end{cases}$$

から p を消去し, 解は $4(x^2+y)(y^2-xC) = (xy+C)^2$.

(補足：p の消去)

$x = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{C}{p^2}$ より $3xp^2 + 2p^3 = C$.

$2p(2xp+p^2) - xp^2 = C$ となるので, $2xp + p^2 = y$ を代入することにより $2yp - xp^2 = C$.

ここで,

$2yp - xp^2 = C$ ...①

$2xp + p^2 = y$ ...②

とし, ①+②×x から $2p(x^2+y) = C + xy$,

②×y−①×x から $p^2(x^2+y) = y^2 - xC$ となるので, この 2 式から p を消去することにより解が求まる.

(ii) $p = 0$ のとき解は $y = 0$.

(7) Bernoulli 型

$z = y^2$ とおくと $z' + 2xz = 2x$.

したがって,

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{\int 2xdx}dx + C\right) \\ &= e^{-x^2}(e^{x^2} + C) \\ y^2 &= 1 + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

よって解は $y = \pm\sqrt{1+Ce^{-x^2}}$.

(8) Clairaut 型

一般解：$y = Cx + \cos C$.

特異解：一般解を C で偏微分すると $x = \sin C$. したがって,

$$\begin{cases} x = \sin C \\ y = Cx + \cos C \end{cases}$$

より, 特異解は $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

(9) Bernoulli 型

$y \neq 0$ として、両辺 y^{-2} をかけると $y^{-2}y' + y^{-1} = e^x$.

ここで, $z = y^{-1}$ とおくと $z' - z = -e^x$.

したがって,

$$\begin{aligned} z &= e^x\left(\int -e^x e^{-x}dx + C\right) \\ &= e^x(-x+C) \end{aligned}$$

よって解は $y = \dfrac{1}{e^x(-x+C)}$.

(10) d'Alembert 型

$y' = p$ とおくと，$y = xp^2 - p^2$.

これを両辺 x で微分して

$$\begin{aligned} p &= p^2 + 2xpp' - 2pp' \\ 2pp'(x-1) &= p(1-p) \end{aligned}$$

(i) $p(1-p) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= \frac{2(x-1)}{1-p} \\ \int \frac{1}{x-1}dx &= \int \frac{2}{1-p}dp \\ \log|x-1| &= -2\log|1-p| + C_1 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_2}{(1-p)^2} + 1 \\ y = xp^2 - p^2 \end{cases}$$

から p を消去し, 解は $y = (x-1)\left(1 + \dfrac{C}{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

(補足：p の消去)

$x = \dfrac{C_2}{(1-p)^2} + 1$ より $(1-p)^2 = \dfrac{C_2}{x-1}$.

これより $p = 1 + \dfrac{C}{\sqrt{x-1}}$ を得るので, 代入して解が求まる.

(ii) $p(1-p) = 0$ のとき

$p = 0$ のとき，解は $y = 0$.

$p = 1$ のとき，解は $y = x - 1$.