

14 [n 階線形定数係数斉次微分方程式] 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

$$(2) y''' - 8y = 0$$

$$(3) y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$$

$$(4) y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$$

15 [n 階線形定数係数非斉次微分方程式] 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) y^{(4)} - 8y'' + 16y = -\sin x$$

$$(2) y''' + y = xe^{-x}$$

16 [特殊な形の n 階微分方程式] 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) y'' = e^{-2y}$$

$$(2) xy'' + 2y' = 8x^2 \quad (x > 0)$$

$$(3) xyy'' + x(y')^2 - 3yy' = 0 \quad (x > 0)$$

ヒント

$$\bullet \int 2y'y'' dx = (y')^2 + C$$

$$\bullet y' = p \text{ や } x = e^t \text{ とおくと...}$$

17 [連立 1 階線形微分方程式] 以下の微分方程式の初期値問題を解け。

ただし $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ 、 $\mathbf{y}' = \left(\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}\right)^T$ である (n は問題ごとに異なり、問題中の行列の行数に対応する)。

$$(1) \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = (1, 0)^T$$

$$(2) \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = (3, 2)^T$$

$$(3) \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = (1, 1)^T$$

$$(4) \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = (1, 2, 3)^T$$