解析学 D 演習 小テスト 3 解答

2019 年 11 月 6 日

解答

(1) $p = y'$ とおく。 このとき、

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

よって、元の微分方程式は $y\dfrac{dp}{dy}p = p^2$ と書ける。

$y = 0$ または $p = 0$ のとき両辺 0 となり、解。

$y \neq 0, p \neq 0$ のとき, 変数分離法を用いて

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\log|p| = \log|y| + C$$

$$p = C_1 y \quad (C_1 = \pm e^C)$$

$p = y'$ より、 $y = C_2 e^{C_1 x}$

(2) $p = y'$ とおく。 このとき、

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

よって、元の微分方程式は

$y\dfrac{dp}{dy}p + p^2 - yp = 0$ と書ける。

$y = 0$ または $p = 0$ のとき両辺 0 となり、解。

$y \neq 0, p \neq 0$ のとき、 $\dfrac{dp}{dy} + \dfrac{p}{y} = 1$

よって、

$$p = e^{-\log|y|}\left(\int e^{\log|y|}dy + C_1\right)$$

$$= \frac{1}{Cy}\left(\frac{C}{2}y^2 + C_1\right) \quad (C = \pm 1)$$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{C_1'}{y} \quad (C_1' = C_1/C)$$

ここで、$p = y'$ より、

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{C_1'}{y} = \frac{y^2 + 2C_1'}{2y}$$

変数分離法を用いて、

$$\int \frac{2y}{y^2 + 2C_1'}dy = \int dx$$

$$\log|y^2 + 2C_1'| = x + C_2$$

$$y^2 + 2C_1' = C_2' e^x$$

$$y = \pm\sqrt{C_2' e^x - 2C_1'}$$

(3) $p = y'$ とする。このとき元の式を変形すると、$xp' + 2p = x^2$

$x \neq 0$ のとき、$p' + \dfrac{2}{x}p = x$ より、

$$p = e^{-2\log|x|}\left(\int xe^{2\log|x|}dx + C_1\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\int x^3 dx + C_1\right)$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}$$

$p = y'$ より、 $y = \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{C_1}{x} + C_2$

(4) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと、$\lambda = 2$ (2 重解)

よって、$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

(5) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0$ を解くと、$\lambda = 8, -4$ (異なる二つの実数解)

よって、$y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-4x}$

(6) 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ を解くと、$\lambda = 2 \pm 3i$ (異なる二つの虚数解)

よって、$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(7) 対応する斉次方程式 $y''+7y'+10y=0$ の一般解 y_c を求める。

特性方程式 $\lambda^2+7\lambda+10=0$ を解くと、$\lambda=-2,-5$ (異なる二つの実数解)

よって、$y_c=C_1e^{-2x}+C_2e^{-5x}$

次に元の式の特殊解 y^* を求める。

$y^*=A\sin 2x+B\cos 2x$ と置いて元の式に代入すると,

$(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)$

$+7(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$

$+10(A\sin 2x+B\cos 2x)$

$=(6A-14B)\sin 2x+(6B+14A)\cos 2x$

$=\sin 2x$

両辺比較して、$y^*=\frac{3}{116}\sin 2x-\frac{7}{116}\cos 2x$

以上より、

$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-5x}+\frac{3}{116}\sin 2x-\frac{7}{116}\cos 2x$

(8) 対応する斉次方程式 $y''+4y'+4y=0$ の一般解 y_c を求める。

特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ を解くと、$\lambda=-2$ (2 重解)

よって、$y_c=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

次に元の式の特殊解 y^* を求める。

$y^*=Ax^2+Bx+C$ と置いて元の式に代入すると,

$(2A)+4(2Ax+B)+4(Ax^2+Bx+C)$

$=4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B+4C$

$=4x^2+1$

両辺比較して、 $y^*=x^2-2x+\frac{7}{4}$

以上より、

$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+x^2-2x+\frac{7}{4}$

(9) 対応する斉次方程式 $y''-8y'+20y=0$ の一般解 y_c を求める。

特性方程式 $\lambda^2-8\lambda+20=0$ を解くと、

$\lambda=4\pm 2i$ (異なる二つの虚数解)

よって、$y_c=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

次に元の式の特殊解を求める。

$y^*=Axe^{4x}$ と置いて元の式に代入すると、

$16Axe^{4x}+8Ae^{4x}$

$-8(Ae^{4x}+4Axe^{4x})+20Axe^{4x}$

$=4Axe^{4x}=xe^{4x}$

両辺比較して、 $y^*=\frac{1}{4}xe^{4x}$

以上より、$y=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}xe^{4x}$

(10) 対応する斉次方程式 $y''+2y'=0$ の一般解 y_c を求める。

特性方程式 $\lambda^2+2\lambda=0$ を解くと、

$\lambda=0,-2$ (異なる二つの実数解)

よって、$y_c=C_1+C_2e^{-2x}$

次に元の式の特殊解を求める。

$y^*=e^{4x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$ と置いて元の式に代入すると、

$e^{4x}[(12A-16B)\sin 2x+(16A+12B)\cos 2x]$

$+2e^{4x}[(4A-2B)\sin 2x+(4B+2A)\cos 2x]$

$=e^{4x}[20(A-B)\sin 2x+20(A+B)\cos 2x]$

$=5e^{4x}\sin 2x$

両辺比較して、 $y^*=\frac{1}{8}e^{4x}(\sin 2x-\cos 2x)$

以上より、$y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{4x}(\sin 2x-\cos 2x)$