

解答

- (1)
- $P(D) = D^2 - 4D + 3$
- とおく。

 $P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

より $\lambda = 3, 1$ であるので、

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

 $P(D)y = x^2 + x$ の特殊解 y^* は、

$$y^* = P^{-1}(D)(x^2 + x)$$

ここで、

$$\begin{aligned} P^{-1}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2 - 4\lambda + 3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\lambda + \frac{13}{27}\lambda^2 + \frac{\lambda^3 R(\lambda)}{\lambda^2 - 4\lambda + 3} \\ &\quad (R(\lambda) \text{ は } \lambda \text{ に関する多項式}) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} y^* &= P^{-1}(D)(x^2 + x) \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + x) + \frac{4}{9}D(x^2 + x) + \frac{13}{27}D^2(x^2 + x) \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + x) + \frac{4}{9}(2x + 1) + \frac{13}{27} \times 2 \\ &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27} \end{aligned}$$

以上より、 $y = y^* + y_c$

$$= \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27} + C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

- (2)
- $P(D) = D^4 - 4D^3 + 3D^2$
- とおく。

 $P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 \\ &= \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

より $\lambda = 3, 1, 0$ (重解) であるので、

$$y_c = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} + C_4 e^x$$

 $P(D)y = x^2 + x$ の特殊解 y^* は、

$$\begin{aligned} y^* &= P^{-1}(D)(x^2 + x) \\ &= \frac{1}{D^2} \frac{1}{D^2 - 4D + 3} (x^2 + x) \end{aligned}$$

(1) の結果を利用して、

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27} \right\} \\ &= \frac{1}{36}x^4 + \frac{11}{54}x^3 + \frac{19}{27}x^2 \end{aligned}$$

以上より、 $y = y^* + y_c$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{36}x^4 + \frac{11}{54}x^3 + \frac{19}{27}x^2 \\ &\quad + C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} + C_4 e^x \end{aligned}$$

- (3)
- $P(D) = D^2 - 8D + 15$
- とおく。

 $P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$$

より $\lambda = 5, 3$ であるので、

$$y_c = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x}$$

 $P(D)y = e^{2x}x^2 + x$ の特殊解 y^* を求める。

$$P(D)y^* = e^{2x}(x^2 + x)$$

$$e^{-2x}P(D)y^* = P(D+2)(e^{-2x}y) = x^2 + x$$

$$(e^{-2x}y^*) = P^{-1}(D+2)(x^2 + x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 4D + 3}(x^2 + x)$$

(1) の結果を利用して、

$$e^{-2x}y^* = \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27}$$

$$y^* = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27} \right) e^{2x}$$

以上より、 $y = y^* + y_c$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{9}x + \frac{38}{27} \right) e^{2x} + C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x}$$

- (4)
- $y'' - \frac{x-2}{x}y' + \frac{2}{x}y = x^2 e^x$

$$y'' - \frac{x-2}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0 \text{ について考える。}$$

 $y = e^x$ は解であるので、一般解を $y =$ $u(x)e^x$ とおくと (以下 $u(x)$ を u と略記)、

$$y' = u'e^x + ue^x$$

$$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

代入して整理すると

$$u'' + \frac{x-2}{x}u' = x^2$$

$$u' = v \text{ とおくと、 } v' + \frac{x-2}{x}v = x^2$$

(以下、線形1階微分方程式の解の公式を用いて解答しても良い。)

$$v' + \frac{x-2}{x}v = 0 \text{ について考える。}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx$$

$$\log |v| = 2 \log |x| - x + C$$

$$|v| = x^2 e^{-x} e^C$$

$$v = C' x^2 e^{-x} \quad (C' = \pm e^C)$$

$$v' + \frac{x-2}{x}v = x^2 \text{ について考える。}$$

$$v = w(x) x^2 e^{-x} \text{ とおき、代入して整理すると}$$

$$w(x)' = e^x$$

$$w(x) = e^x + C_1$$

以上より、

$$y = u(x) e^x = e^x \int v dx$$

$$= e^x \int w(x) x^2 e^{-x} dx$$

$$= e^x \int (e^x + C_1) x^2 e^{-x} dx$$

$$= e^x \int (x^2 + C_2 x^2 e^{-x}) dx$$

$$= e^x \left(\frac{x^3}{3} + C_1 (x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C_2 \right)$$

$$= \frac{x^3}{3} e^x + C_1 (x^2 + 2x + 2) + C_2 e^x$$

$$(5) \quad x^2 y'' - 3xy' + y = x^2 \log x$$

Euler 型であるので、 $x = e^t$ とおくと、

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + y = t e^{2t}$$

$$P(D) = D^2 - 4D + 4 \text{ とおく } \left(D = \frac{d}{dt} \right).$$

$P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \text{ より}$$

$\lambda = 2$ (重解) であるので、

$$y_c = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

$P(D)y = t e^{2t}$ の特殊解 y^* を求める。

$$P(D)y^* = t e^{2t}$$

$$e^{-2t} P(D)y^* = P(D+2)(e^{-2t} y) = t$$

$$(e^{-2t} y^*) = P^{-1}(D+2)(t) = \frac{1}{D^2}(t) = \frac{1}{6} t^3$$

以上より、 $y = y^* + y_c$

$$= \frac{t^3}{6} e^{2t} + (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

$$= \left(\frac{t^3}{6} + C_1 + C_2 t \right) e^{2t}$$

$$= \left[\frac{(\log x)^3}{6} + C_1 + C_2 \log x \right] x^2$$