解析学 D 演習 小テスト 5 解答

2019 年 11 月 27 日

解答

(1) $P(D) = D^4 - 5D^2 + 4$ とおく。

$P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$P(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 1) = 0$

より $\lambda = \pm 2, \pm 1$ であるので、

$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x}$

$P(D)y = 5\cos 2x$ の特殊解 y^* を、

$y^* = A\cos 2x$ とおき、代入すると。

$16A\cos 2x + 20A\cos 2x + 4A\cos 2x$

$= 40A\cos 2x = 5\cos 2x$

係数比較して、$A = \dfrac{1}{8}$

以上より、

$$\begin{aligned} y &= y^* + y_c \\ &= \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \\ &\quad + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} \end{aligned}$$

(2) $P(D) = D^3 + 8$ とおく。

$P(D)y = 0$ の一般解 y_c は、

$P(\lambda) = \lambda^3 + 8 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$

より $\lambda = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$ であるので、

$y_c = C_1 e^{-2x} + e^{x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x)$

$P(D)y = xe^{-2x}$ の特殊解 y^* は、

$y^* = P^{-1}(D)(xe^{-2x})$

$$\begin{aligned} y^* &= e^{-2x}P^{-1}(D-2)x \\ &= e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^3 + 8}x \\ &= e^{-2x}\frac{1}{(D^3 - 6D^2 + 12D)}x \\ &= e^{-2x}\frac{1}{D}\frac{1}{(D^2 - 6D + 12)}x \\ &= \frac{1}{12}e^{-2x}\frac{1}{D}\left(1 - \frac{1}{12}(D^2 - 6D)\right)x \\ &= \frac{1}{12}e^{-2x}\frac{1}{D}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{12}e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{24}e^{-2x}\left(x^2 + x\right) \end{aligned}$$

以上より、$y = y^* + y_c$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{24}e^{-2x}\left(x^2 + x\right) \\ &\quad + C_1 e^{-2x} + e^{x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

(3) $xyy'' + x(y')^2 - 3yy' = 0$

$x = e^t$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt} = e^t$。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}e^{-t} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}e^{-t} - \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}e^{-t} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t} \end{aligned}$$

代入すると、

$$\begin{aligned} &e^t y\left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t}\right) \\ &\quad + e^t\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)^2 - 3y\frac{dy}{dt}e^{-t} = 0 \end{aligned}$$

$$y\frac{d^2y}{dt^2} - 4y\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

$\dfrac{dy}{dt} = p$ とおくと、

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = p\frac{dp}{dy}$$

代入すると、

$$yp\frac{dp}{dy} - 4yp + p^2 = 0$$

(i) $p = 0$ のとき、$\dfrac{dy}{dt} = 0$ より $y = C$ となり解。

(ii) $p \neq 0$ のとき、

$$y\frac{dp}{dy} + p = 4y$$

$$\frac{d}{dy}(py) = 4y$$

$(py) = 2y^2 + C_1$

$y\dfrac{dy}{dt} = 2y^2 + C_1$

$\dfrac{2y}{y^2 + \frac{1}{2}C_1}\dfrac{dy}{dt} = 4$

$\displaystyle\int \frac{2y}{y^2 + \frac{1}{2}C_1}dy = 4\int dt$

$\log|y^2 + \dfrac{1}{2}C_1| = 4t + C_2$

$y^2 = C_1' \pm e^{4t}e^{C_2} \quad (C_1' = -\dfrac{1}{2}C_1)$

$y^2 = C_1' + C_2'e^{4t} \quad (C_2' = \pm e^{C_2})$

$y^2 = C_1' + C_2'x^4$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

固有値と固有ベクトルを求める。

$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 - 1$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$

$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$ より、

$\lambda = 3, 1$

(i) $\lambda = 3$ のとき

$(A - 3I)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

より $y_1 = y_2$ が導かれるので、対応する固有ベクトル $V_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$。

(ii) $\lambda = 1$ のとき

$(A - I)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

より $y_1 = -y_2$ が導かれるので、対応する固有ベクトル $V_2 = (1, -1)^{\mathrm{T}}$。

よって、

$\boldsymbol{y} = C_1e^{3x}(1, 1)^{\mathrm{T}} + C_2e^{x}(1, -1)^{\mathrm{T}}$

初期値を代入すると、

$\boldsymbol{y}(0) = C_1(1, 1)^{\mathrm{T}} + C_2(1, -1)^{\mathrm{T}}$

$= (C1 + C2, C1 - C2)^T = (1, -2)^{\mathrm{T}}$

よって、$C_1 = -\dfrac{1}{2}, C_2 = \dfrac{3}{2}$

以上より、

$\boldsymbol{y} = -\dfrac{1}{2}e^{3x}(1, 1)^{\mathrm{T}} + \dfrac{3}{2}e^{x}(1, -1)^{\mathrm{T}}$

$= (-\dfrac{1}{2}e^{3x} + \dfrac{3}{2}e^{x}, -\dfrac{1}{2}e^{3x} - \dfrac{3}{2}e^{x})^{\mathrm{T}}$

別解

$y_1' = 2y_1 + y_2$

$y_2' = y_1 + 2y_2$

(i) 2 式の和

$y_1' + y_2' = 3(y_1 + y_2)$ より

$y_1 + y_2 = 2C_1e^{3x}$

(ii) 2 式の差

$y_1' - y_2' = y_1 - y_2$ より

$y_1 - y_2 = 2C_2e^{x}$

よって、

$y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{x}$

$y_2 = C_1e^{3x} - C_2e^{x}$

（以下略）

(5) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

固有値と固有ベクトルを求める。

$|\lambda I - A| = (\lambda - 4)(\lambda - 2) + 1$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$= (\lambda - 3)^2 = 0$ より、

$\lambda = 3$ (重解)

(i) $(A - 3I)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

より $y_1 = y_2$ が導かれるので、対応する固有ベクトル $V_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$。

(ii) $(A - 3I)\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = V_1$

より $y_1 = 1 - y_2$ が導かれるので、固

有ベクトルの代替のベクトルとして
$V_2 = (1,0)^{\mathrm{T}}$ を用いる。

よって、
$\boldsymbol{y} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)(1,1)^{\mathrm{T}} + C_2 e^{x}(1,0)^{\mathrm{T}}$
初期値を代入すると、
$\boldsymbol{y}(0) = C_1(1,1)^{\mathrm{T}} + C_2(1,0)^{\mathrm{T}}$
$= (C1 + C2, C1)^{T} = (1,0)^{\mathrm{T}}$
よって、$C_1 = -1, C_2 = 2$
以上より、
$\boldsymbol{y} = e^{3x}(-1 + 2x)(1,1)^{\mathrm{T}} + 2e^{3x}(1,0)^{\mathrm{T}}$
$= (e^{3x}(1 + 2x), e^{3x}(-1 + 2x))^{\mathrm{T}}$