物理科学演習問題（５）　中島班　２００７／５／１４

小テスト

問題 ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさが時間に対して一定であれば、ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ は互いに垂直であることを示せ。

問１ 次の各式を時間 t で微分せよ。ただし、$\boldsymbol{r}$ は t の関数で $r=|\boldsymbol{r}|$ であり、他の文字は定数あるいは一定なベクトルを表すものとする。

(1) $r^2\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$　(2) $(a\boldsymbol{r}+r\boldsymbol{b})^2$　(3) $r^3\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

(4) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}+\dfrac{r\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}$　(5) $\boldsymbol{r}^2+\dfrac{1}{r^2}$　(6) $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$

(7) $\boldsymbol{r}\cdot\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$　(8) $\boldsymbol{r}\times\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$

問２ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき、次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b})dt$　(2) $\displaystyle\int\boldsymbol{a}\cos t dt$　(3) $\displaystyle\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{s}\right)dt$

(4) $\displaystyle\int\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$　(5) $\displaystyle\int 2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}dt$　(6) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\frac{dr}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)dt$

問３ (基本) デカルト座標で表される単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を２次元の極座標の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ で表せ。

問４ 磁場中を運動する荷電粒子には，ローレンツ力 ($\boldsymbol{F}_L=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$) が作用する。ここで、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{v}$ は粒子の速度，q は粒子の電荷を表す。重力は無視できるとして以下の問に答えよ。

(1) 三次元空間で $-e$ の電荷をもつ荷電粒子が $\boldsymbol{v}(t)=(v_0,0,0)$ の速度で運動していた。時刻 $t=0$ から $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の静磁場が印加された。$t=0$ で、粒子が受ける力 $\boldsymbol{F}_L$ を求めよ。

(2) $t>0$ での粒子の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を $\boldsymbol{v}(t)=(v_x(t),v_y(t),v_z(t))$ とおく。粒子が満たすべき運動方程式を求めよ。ただし粒子の質量を m とする。

(3) 速度 $\boldsymbol{v}(t)=(v_0\cos(eB/m)t,v_0\sin(eB/m)t,0)$ が、(2) で求めた運動方程式を満たすことを確かめよ。

(4) 三次元空間で $-e$ の電荷をもつ荷電粒子が $\boldsymbol{v}(t)=(v_0,0,v_0)$ で等速直線運動している。時刻 $t=0$ で $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の静磁場が印加されたとき、粒子がどのような運動をするか考察せよ。図を使って説明すること。

問５ 次の問に答えよ。

(1) 質量 m の質点に $-z$ 方向の重力加速度が働いている。運動方程式を記述せよ。ただし、運動方程式は $m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=\boldsymbol{F}$ である。

(2) 運動方程式を解いて、速度の時間変化を求めよ。ただし $t=0$ で $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ とする。

(3) さらに、高さ h の塔から物体を自由落下させたときの位置の時間変化を求めよ。

問６ 次の式を示せ。

(1) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ (ベクトル三重積)

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$

問７ (重要) 以下の問いに答えよ。

(1) ２次元の直交座標での位置 (x,y) を、極座標 (r,θ) を用いて表せ。

(2) 直交座標での速度 $(\dot{x},\dot{y})$ を極座標を用いて表せ。また、その大きさを求めよ。

(3) 加速度 $(\ddot{x},\ddot{y})$ を極座標を用いて表せ。また、その大きさを求めよ。

レポート問題（５）　中島班　２００７／５／１４

<u>A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。</u>

Q MKSA 単位系の理解を深めるため、次元解析により以下の問いに答えよ。次元解析とは、ある物理量 Q の次元を $[Q]$ と表すと、４つの独立な次元 (長さ (L)、質量 (M)、時間 (T)、電流 (A)) を用いて、$[Q]=\mathrm{L}^\alpha\mathrm{M}^\beta\mathrm{T}^\gamma\mathrm{A}^\delta$ と表せることから、Q についての表式を導出する解析方法である。

(1) 振り子の運動を考える。振り子の運動を記述するのに必要な物理量は、質量 m(kg)、重力加速度 $g(\mathrm{m/s^2})$、振り子の長さ ℓ(m) である。運動方程式を解くこと無しに、周期の表式を求めよ。

(2) ボーア半径の表式を求めよ。電磁場中での荷電粒子の運動を考えることになるので、真空の誘電率 ε_0、プランク定数 h、電子の静止質量 m_e、素電荷 e などが必要な物理量であろう。

注意事項

- これまでの演習問題を必ず持ってくること。
- 嶋原先生、八木先生の講義ノートなどを持ってくること。
- 問題はノートなどの清書すること。
  今の努力をケチれば、将来に獲得できるものもそれなりにしかならない。