物理科学演習問題（１０）　中島班　２００７／６／１８

小テスト

問題 一直線上を運動する質量 m の質点に、$F=-kx$ なる力が働いている (k は常数)。この質点の運動において、エネルギー保存則が成り立つことを示せ。

問１ 次の微分方程式を解け。(二階線形微分方程式 [同次])

(1) $y''-7y'+12y=0$　(2) $y''+2y'+2y=0$　(3) $y''-2y'+y=0$

問２ (特訓) 次の微分方程式を解け。(二階線形微分方程式 [斉次])

(1) $y''+3y'+2y=0$　(2) $y''+6y'+9y=0$　(3) $y''+2y'+5y=0$

(4) $y''-3y'-10y=0$　(5) $y''-4y'+9y=0$　(6) $y''+6y'+25y=0$

問３ (前問の具体例) フックの法則に従うばねに質量 m の質点をつないだ。ばね定数を k、その自然長を L とする。質点の速度に比例する抵抗 μv が働いているとする。

(1) 質点の運動方程式を書け。

(2) $x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos\omega t$(ただし、$\gamma,\omega$ は正の実数) が運動方程式の解となり得ることを示し、その条件を求めよ。また、γ,ω を求めよ。

(3) $x(t)$ を図示せよ。

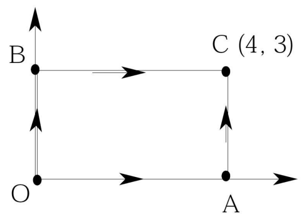
問４ なめらかな水平面上で、ℓ だけ離れた 2 点間に張力 T で糸を張る。糸の中央に質量 m の質点を結び、糸に垂直な方向に少しずらして離したときの糸の微小振動の周期を求めよ。

問５ 次の関数が与えられているとする。図の経路 $\overline{OAC}$、経路 $\overline{OBC}$ に沿って物体を動かした時に、線積分 $W=\int(F_xdx+F_ydy)$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{F}=(3x,4y)$　(2) $\boldsymbol{F}=(y,2x)$

(3) $\boldsymbol{F}=(2,y^2)$　(4) $\boldsymbol{F}=(y^2,x+y)$

(5) $\boldsymbol{F}=(y,x)$　(6) $\boldsymbol{F}=(1,0)$



***One Point**

力 $\boldsymbol{F}$ が保存力である場合、$\oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ が成立する。ここで、積分 $\oint_c$ は閉じた経路 C について行う (周回積分)。経路 C を閉じていった極限を考えると、この式は rot$\boldsymbol{F}$=0 と同値である。「rot」はベクトルの回転と呼ばれるものであり、ナブラ $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を用いて表すと $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ と表される。

レポート問題（１０）　中島班　２００７／６／１８

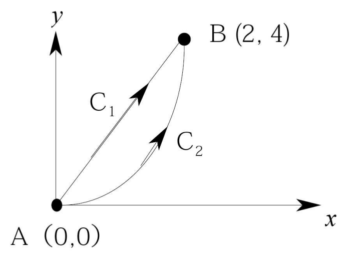
A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。

６/２５提出（通常通り：小テスト後提出）

Ｑ１　右図の直線 C_1 $(y=2x)$ 及び放物線 C_2 $(y=x^2)$ に沿う A 点から B 点までの線積分 $\displaystyle\int_A^B (F_x dx + F_y dy)$ の値を求めよ。
ただし、

$$(1)\boldsymbol{F} = (x^2y, x^3), \qquad (2)\boldsymbol{F} = (3x^2y, x^3)$$

とする。



７/２提出　（提出場所：C105 室前のレポートボックス [17:00 まで]）

Ｑ２ $\ddot{x} = -\omega^2 x$ という形の微分方程式のいくつかの解法を考える。

解法１　２回微分が含まれていることから、一般解には積分定数が２つあればよい。また、２回微分したものが符号を反転して再び元の関数に定数をかけた形になっていることから、三角関数が解として予想される。

(a) $x = A\sin(\omega t + \delta)$ が、微分方程式を満足する解であることを確かめよ。ここで $A,\ \delta$ は２つの積分定数である。

(b) $t=0$ で $x=0,\ \dot{x}=v_0$ の時と、$t=0$ で $x=x_0,\ \dot{x}=0$ の時の解を示せ。

解法２ 解 x は時間 t に関し、$x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ という**べき級数**に展開可能であると仮定する。

(a) 微分方程式にべき級数展開した x を代入し、t のべきの等しい項をまとめてみよ。展開係数が　$a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n)!}a_0,\quad a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n\omega^{2n}}{(2n+1)!}a_1$　とまとめられることを示せ。

(b) $x = a_0\cos\omega t + \dfrac{a_1}{\omega}\sin\omega t$ となることを示せ。

解法３ やや技巧的な解き方を考える。

(1) 微分方程式の両辺に $\dot{x}$ を乗じる。得られた式を $\dfrac{d}{dt}(x^2) = 2x\dot{x}$ などの関係を用いて積分を実行せよ。

(2) (1) の結果を $\dfrac{dx}{dt} = \cdots$ の形に変形し、変数分離により x を求めよ。なお、答えが見通し易くなるように、(1) で現れる積分定数などを適当に変換しても良い。(その際、どう変換したのかを明示すること。)