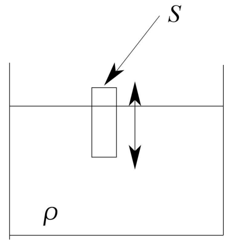
物理科学演習問題（１１）　中島班　２００７／６／２５

小テスト

問題 次の微分方程式を解け。

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$　　(2) $y'' + 8y' + 16y = 0$

問１ 水に浮かぶ直方体の物体がある。静止した状態で水中に d だけ沈んでいる。物体を少し水中方向に押して手を離すと単振動を始める。水の密度を ρ、水面に平行な直方体の面の断面積を S、重力加速度を g として、物体の質量と振動周期を求めよ。



問２ 質量 m の質点が $F(x) = -\dfrac{k}{x^2} + \dfrac{2\ell^2}{mx^3}$ $(k > 0, x > 0)$ で表される力を受けて x 軸上を運動している系を考える。

(1) この系の運動方程式を書け。

(2) エネルギー保存則が成り立っていることを示し、この系のポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ。(ただし、$U(\infty) = 0$ とする。)

(3) $U(x)$ をグラフに描け。なお、x 軸との交点、極小となる点などの座標を明示すること。

$U(x)$ が極小をとるときの x を x_0 とする。質点が x_0 の近傍にあるとき、近似的に単振動するとみなせる。

(4) $U(x)$ を x_0 の周りで２次までテーラー展開せよ。

(5) $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}$ を利用して、この振動を記述する運動方程式を書け。

(6) 振動の周期を求めよ。

問３ 質量 $m,\ 2m$ の２つの質点 A, B が、水平面の x 軸上で自然長 L、ばね定数 k のばねでつながれている。A, B の時刻 t での位置を $x_1,\ x_2$ とし、B が A よりも x 軸の正の方向にあるとする。ばねを伸ばして、A, B, ばね, 共に静止した状態から手を離す。

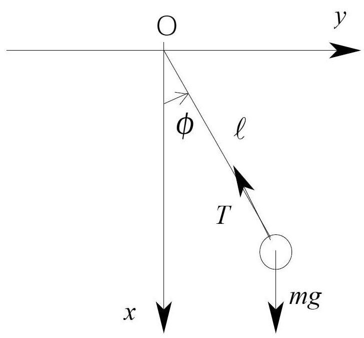
(1) A, B について運動方程式を立て、重心 x_G の運動を時刻 t の関数として表せ。ただし、$t = 0$ で $x_1 = 0,\ x_2 = L + a$ であるとする $(a > 0)$。

(2) ばねの伸び $X = x_2 - x_1 - L$ は単振動することを示せ。

(3) **(1), (2)** より、$x_1,\ x_2$ の運動の様子を t の関数としてグラフに示せ。

問４ 図のように、軽くて一定の長さ ℓ の糸を天井から吊るし、先端に質量 m のおもりをつけて鉛直面内で揺らした。[1]

(1) 糸の張力を T として、おもりに対する運動方程式を直交座標表示で書き下せ。



(2) **(2)** の結果を極座標を用いて変換し、ϕ に対する微分方程式を書き表せ。

(3) 振れ角が小さい時、$\sin\phi \sim \phi$、$\cos\phi \sim 1$ と近似できる。この近似のもとで、**(2)** の微分方程式を満たす関数を探せ。ただし、$t = 0$ で $\phi = 0$ とする。

問５ 中心力が作用している質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

(1) $\boldsymbol{r} \times \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{L}$ は定ベクトルであることを示せ。

(2) $|\boldsymbol{L}|$ を、極座標 $r,\ \theta$ を用いて表せ。

問６ n 個の質点からなる質点系において、質点間に働く力は内力だけであり、かつ、この内力が中心力であるとする。このとき、この質点系の全角運動量は保存することを示せ。なお、全角運動量は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i$ であり、内力が中心力であるとは m_i と m_j に働く力が $f(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ で表せる場合を言う。

[1] この問題は、第７回のとき問題です。(1),(2) は既に解きました。今では、(3) も解けるはずです。