物理科学演習問題（１２）　中島班　２００７／７／９

小テスト

問題 質量 $m,\ 2m$ の 2 つの質点 A, B が、水平面の x 軸上で自然長 L、ばね定数 k のばねでつながれている。A, B の時刻 t での位置を $x_1,\ x_2$ とし、B が A よりも x 軸の正の方向にあるとする。ばねを伸ばして、A, B, ばね, 共に静止した状態から手を離す。

(1) A, B について運動方程式を立て、重心 x_G の運動を時刻 t の関数として表せ。ただし、$t=0$ で $x_1=0,\ x_2=L+a$ であるとする $(a>0)$。

(2) ばねの伸び $X=x_2-x_1-L$ は単振動することを示せ。また、その周期を求めよ。

問１ 中心力が作用している質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

(1) $\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{L}$ は定ベクトルであることを示せ。

(2) $|\boldsymbol{L}|$ を、極座標 $r,\ \theta$ を用いて表せ。

問２ n 個の質点からなる質点系において、質点間に働く力は内力だけであり、かつ、この内力が中心力であるとする。このとき、この質点系の全角運動量は保存することを示せ。なお、全角運動量は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i$ であり、内力が中心力であるとは m_i と m_j に働く力が $f(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)$ で表せる場合を言う。

問３ 直線上を運動する質量 m の粒子の運動方程式が $m\dfrac{dv}{dt}=-kx+\lambda x^3$ で与えられるとき、次の問いに答えよ。

(1) 運動方程式を積分して、エネルギー保存則を導け。

(2) k と λ の符号がそれぞれ正負の異なる組み合わせ 4 つを取るとき、ポテンシャル関数 (運動エネルギー以外の部分) をグラフにして書け。また、その 4 つのポテンシャル下で質点の運動エネルギー値を適宜設定して、それぞれの場合での運動の特徴を述べよ。

(3) 速度 v に比例する抵抗力 μv が作用するとき、粒子のもつ力学的エネルギーの減少の単位時間当たりの割合を求めよ。

問４ 次の微分方程式を解け。(二階線形微分方程式 [非同次])

(1) $y''+3y'+2y=e^x$　(2) $y''-3y'+2y=\cos x$　(3) $y''-2y'+y=e^x\cos x$

問5 平面内において、力の中心を極とする極座標で $r = a(1 + b\cos\theta)$ で与えられる軌道を描く質量 m の質点に働く中心力 $f(r)$ が、$f(r) = -mh^2 a\left\{\dfrac{2a(b^2-1)}{r^5} + \dfrac{3}{r^4}\right\}$ で与えられることを示せ。ここで、h は**問1**で求めた $|\boldsymbol{L}| = h$ である。

問6 ばね定数 k のばねに質量 m のおもりがつけられて、滑らかな水平面上で運動している。このおもりには、速度 v に比例する抵抗力 $-Sv$ が働いている (比例係数を S とする)。この運動の運動方程式を求めよ。さらに、以下の場合について、その運動方程式を解き、運動の様子をグラフに描け。

(1) $S^2 < 4km$ のとき

(2) $S^2 > 4km$ のとき

レポート問題（１２）　中島班　２００７／７／９

A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。

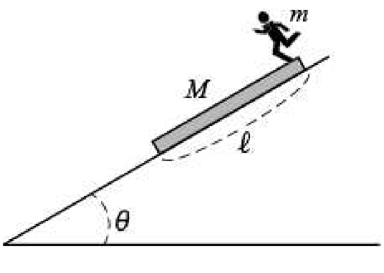
Q 次の問いに答えよ。

(1) 水平と θ の角をなす滑らかな斜面上にのせた質量 M の板の上を、質量 m の人が上端から歩く。板が滑り動かないようにするには、どのように歩いたらよいか。

(2) さらに、この板の長さを ℓ とする。人も板も初速度 0 であったすると、人が板の下端にどのくらいの時間で達するか求めよ。

(3) 板の下端に着いたとき、人が斜面を走り降りた分だけ位置エネルギーが減少し、その分運動エネルギーにが増加するはずである。果たして、そうなっているか確かめよ。[1]

(4) $\theta = 0$、すなわち滑らかな水平面上に質量 M の板をのせる。板の上を質量 m の人が端から歩いて他端に達する時、板はどれだけ動いているか求めよ。



[1]いささか不思議な結果が得られるハズである。つまり、エネルギー保存則が破れているように思える結果が得られる。もちろん、そのような大発見ではないわけで、どこかに論理のおかしさがある。結果をきちんと説明できれば、申し分なし！