物理科学演習問題（４）　中島班　２００８／５／１２

小テスト (10 分)

問題 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ がある。この 2 つのベクトルに垂直なベクトルを求めよ。(長さは任意で良い)

発展 とある問題は、力試しの問題です。授業中に解説などは行いません。ある程度解いてみて、自分の解答をチェックして欲しいという人は、レポート提出時に合わせて解答して下さい。（$+\alpha$ の評価もします。）

問１ (積み残し) ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさが時間に対して一定であれば、ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ は互いに垂直であることを示せ。

問２ 次の各式を時間 t で微分せよ。ただし、$\boldsymbol{r}$ は t の関数で $r = |\boldsymbol{r}|$ であり、他の文字は定数あるいは一定なベクトルを表すものとする。

(1) $r^2\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$　(2) $(a\boldsymbol{r} + r\boldsymbol{b})^2$　(3) $r^3\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

(4) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2} + \dfrac{r\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}$　(5) $\boldsymbol{r}^2 + \dfrac{1}{r^2}$　(6) $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$

(7) $\boldsymbol{r}\cdot\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$　(8) $\boldsymbol{r}\times\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$

問３ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を定ベクトルとするとき、次の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b})dt$　(2) $\displaystyle\int\boldsymbol{a}\cos t\,dt$　(3) $\displaystyle\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{s}\right)dt$

(4) $\displaystyle\int\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$　(5) $\displaystyle\int 2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}dt$　(6) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \frac{dr}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)dt$

問４ 次の問に答えよ。

(1) 質量 m の質点に $-z$ 方向の重力加速度が働いている。運動方程式を記述せよ。ただし、運動方程式は $m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ である。

(2) 運動方程式を解いて、速度の時間変化を求めよ。ただし $t = 0$ で $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ とする。

(3) さらに、高さ h の塔から物体を自由落下させたときの位置の時間変化を求めよ。

問５ 次の式を示せ。

(1) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$　(ベクトル三重積)

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$

問６ (基本) デカルト座標で表される単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を２次元の極座標の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ で表せ。

問７ (重要) 以下の問いに答えよ。

(1) ２次元の直交座標での位置 (x, y) を、極座標 (r, θ) を用いて表せ。

(2) 直交座標での速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ を極座標を用いて表せ。また、その大きさを求めよ。

(3) 加速度 $(\ddot{x}, \ddot{y})$ を極座標を用いて表せ。また、その大きさを求めよ。

問８ 発展 磁場中を運動する荷電粒子には，ローレンツ力 $(\boldsymbol{F}_L = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ が作用する。ここで、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{v}$ は粒子の速度，q は粒子の電荷を表す。重力は無視できるとして以下の問に答えよ。

(1) 三次元空間で $-e$ の電荷をもつ荷電粒子が $\boldsymbol{v}(t) = (v_0, 0, 0)$ の速度で運動していた。時刻 $t = 0$ から $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の静磁場が印加された。t= 0 で、粒子が受ける力 $\boldsymbol{F}_L$ を求めよ。

(2) $t > 0$ での粒子の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ とおく。粒子が満たすべき運動方程式を求めよ。ただし粒子の質量を m とする。

(3) 速度 $\boldsymbol{v}(t) = (v_0 \cos(eB/m)t, v_0 \sin(eB/m)t, 0)$ が、(2) で求めた運動方程式を満たすことを確かめよ。

(4) 三次元空間で $-e$ の電荷をもつ荷電粒子が $\boldsymbol{v}(t) = (v_0, 0, v_0)$ で等速直線運動している。時刻 $t = 0$ で $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の静磁場が印加されたとき、粒子がどのような運動をするか考察せよ。図を使って説明すること。

レポート問題（４）　中島班　２００８／５／１２

A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。

Q 以下の問いに答えよ。

(a) 位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を頂点とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}|$ であることを示せ。

(b) 幅 a の直線車道すれすれに幅 a の車が一定の速さ V で進行している。車の前方 d の位置から歩行者が車道をまっすぐに一定の v で横切る。このとき、車と歩行者が衝突しない条件の中で、v の最低速度とその時の角度 θ(道路と歩行者の進行方向のなす角) を求めよ。

注意事項

- 嶋原先生、八木先生の講義ノートなどを持ってくること。