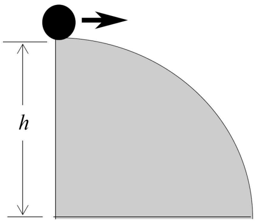
物理科学演習問題（８）　中島班　２００８／６／９

小テスト (10 分)

問題 図のように、質量 m の物体を半径 h の 1/4 円弧の上端から水平右方向にゆっくりと滑らせた。物体が円弧から離れる高さを求めよ。ただし、力学的エネルギーの保存、$\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向の運動方程式から考えること。



問 1 以下の微分方程式の一般解と括弧内の初期条件を満たす特殊解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x, \quad (y(0) = 1)$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \log|x|, \quad (y(1) = 1)$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2, \quad (y(0) = 2,\ y'(0) = 1)$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sin x, \quad (y(0) = 0,\ y'(0) = 0)$

問 2 次の微分方程式を解け。初期条件のあるものは、一般解と特殊解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -y + 3$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = (y-a)(y-b)$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = (y-2)^2$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad (y(0) = 3)$　　(5) $3x\dfrac{dy}{dx} + 2y^2 = xy\dfrac{dy}{dx}, \quad (y(e) = 1)$

問 3 質量 m の物体が速度に比例した空気抵抗を受けながら落下する。重力加速度を g、空気抵抗の速度に対する比例係数を $\gamma(>0)$ として以下の問いに答えよ。

(1) 鉛直上方を $+y$ として、この運動の運動方程式を記せ。

(2) 運動方程式から、速度と位置の時間変化を求めよ。なお、$t = 0$ の時、原点で静止していたものとする。

(3) (2) の結果を、横軸を時間 (t)、縦軸を速度もしくは位置としたグラフに表せ。

問 4 貯水タンクの水位が h の時、タンクの下部についた吸水口から排出される単位時間あたりの水量は $k\sqrt{h}$ であった。$t = 0$ で $h = h_0$ であったとする。水位の時間変化を求めよ。ただし、タンクの断面積は一定で A とし、$k > 0$ である。

問５ 放射性同位元素が単位時間当りに崩壊する原子の数は、今ある (崩壊していない) 原子の数 N に比例する。

(1) 比例係数を λ として、上述の問題文を微分方程式にして表せ。また、初期原子数を N_0 として、その微分方程式を解け。

(2) この元素の平均寿命 τ と半減期 T は、それぞれ $\dfrac{1}{\lambda}$ および $\log 2 \cdot \tau$ で与えられることを示せ。

問６ 質量 M の船が速度 v で進む時、水の抵抗は $f = av + bv^2$ (a, b は正の定数) を受けるとする。速度 v_0 の時にエンジンを止めれば、それからどれだけ進んで止まるか求めよ。ただし、変数変換 $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{d}{dx} = v\dfrac{d}{dx}$ を用いよ。

レポート問題（８）　中島班　２００８／６／９

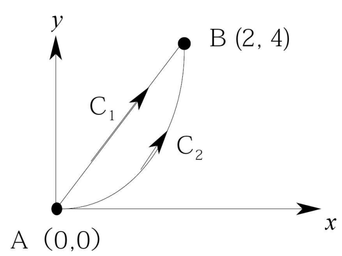
A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。

Ｑ１ 右図の直線 C_1 ($y = 2x$) 及び放物線 C_2 ($y = x^2$) に沿う A 点から B 点までの線積分 $\displaystyle\int_A^B (F_x dx + F_y dy)$ の値を求めよ。

ただし、

$(1)\boldsymbol{F} = (x^2y, x^3)$,　　$(2)\boldsymbol{F} = (3x^2y, x^3)$

とする。



***One Point**

力 $\boldsymbol{F}$ が保存力である場合、$\displaystyle\oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ が成立する。ここで、積分 $\displaystyle\oint_c$ は閉じた経路 C について行う (周回積分)。経路 C を閉じていった極限を考えると、この式は rot$\boldsymbol{F}$=0 と同値である。「rot」はベクトルの回転と呼ばれるものであり、ナブラ $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を用いて表すと $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ と表される。