物理科学演習問題（９）　中島班　２００８／６／１６

小テスト (5 分)

問題 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = -y + 3$$

問１ 質量 m の物体が速度に比例した空気抵抗を受けながら落下する。重力加速度を g、空気抵抗の速度に対する比例係数を $\gamma(>0)$ として以下の問いに答えよ。

(1) 鉛直上方を $+y$ として、この運動の運動方程式を記せ。

(2) 運動方程式から、速度と位置を時間の関数として求めよ。なお、$t=0$ の時、原点で静止していたものとする。

(3) (2) の結果を、横軸を時間 (t)、縦軸を速度もしくは位置としたグラフに表せ。

問２ 貯水タンクの水位が h の時、タンクの下部についた吸水口から排出される単位時間あたりの水量は $k\sqrt{h}$ であった。$t=0$ で $h=h_0$ であったとする。水位の時間変化を求めよ。ただし、タンクの断面積は一定で A とし、$k>0$ である。

問３ 放射性同位元素が単位時間当りに崩壊する原子の数は、今ある (崩壊していない) 原子の数 N に比例する。

(1) 比例係数を λ として、上述の問題文を微分方程式にして表せ。また、初期原子数を N_0 として、その微分方程式を解け。

(2) この元素の平均寿命 τ と半減期 T は、それぞれ $\frac{1}{\lambda}$ および $\log 2 \cdot \tau$ で与えられることを示せ。

問４ 一直線上を運動する質量 m の質点に、$F=-kx$ なる力が働いている (k は常数)。

(1) この質点の運動において、エネルギー保存則が成り立つことを示せ。

(2) 一直線上の運動において、横軸に位置 x、縦軸に運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ をとって図を描くと、その曲線の傾きは力を表すことを示せ。

問５ 質量 M の船が速度 v で進む時、水の抵抗は $f = av + bv^2$ (a, b は正の定数) を受けるとする。速度 v_0 の時にエンジンを止めれば、それからどれだけ進んで止まるか求めよ。ただし、変数変換 $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx} = v\frac{d}{dx}$ を用いよ。

問６ 次の微分方程式を解け。(二階線形微分方程式 [同次])

(1) $y'' - 7y' + 12y = 0$　　(2) $y'' + 2y' + 2y = 0$　　(3) $y'' - 2y' + y = 0$

レポート問題（９）　中島班　２００８／６／１６

<u>A4 レポート用紙に解答を記入すること。学生番号、名前を記入し、２枚以上の時は必ず左上をホッチキスで止めて提出のこと。小テスト直後に回収します。</u>

６/３０提出

Q　$\ddot{x} = -\omega^2 x$ という形の微分方程式のいくつかの解法を考える。

解法１　２回微分が含まれていることから、一般解には積分定数が２つあればよい。また、２回微分したものが符号を反転して再び元の関数に定数をかけた形になっていることから、三角関数が解として予想される。

(a) $x = A\sin(\omega t + \delta)$ が、微分方程式を満足する解であることを確かめよ。ここで $A,\ \delta$ は２つの積分定数である。

(b) $t = 0$ で $x = 0,\ \dot{x} = v_0$ の時と、$t = 0$ で $x = x_0,\ \dot{x} = 0$ の時の解を示せ。

解法２　解 x は時間 t に関し、$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ という**べき級数**に展開可能であると仮定する。

(a) 微分方程式にべき級数展開した x を代入し、t のべきの等しい項をまとめてみよ。展開係数が　$a_{2n} = \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} a_0,\quad a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1$　とまとめられることを示せ。

(b) $x = a_0 \cos\omega t + \dfrac{a_1}{\omega}\sin\omega t$ となることを示せ。

解法３　やや技巧的な解き方を考える。

(1) 微分方程式の両辺に $\dot{x}$ を乗じる。得られた式を $\dfrac{d}{dt}(x^2) = 2x\dot{x}$ などの関係を用いて積分を実行せよ。

(2) (1) の結果を $\dfrac{dx}{dt} = \cdots$ の形に変形し、変数分離により x を求めよ。なお、答えが見通し易くなるように、(1) で現れる積分定数などを適当に変換しても良い。(その際、どう変換したのかを明示すること。)